Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
FURTHER MATHEMATICS

Examen final (1 de junio de 2017) / Final exam (June 1, 2017)
Tiempo máximo: **2 h. y 10 m.** / Maximum time: **2 h. and 10 m.**
Máxima puntuación: **10 puntos** / Top grade: **10 points**

Profesor / Teacher:
Juan Miguel León-Rojas

MUY IMPORTANTE: **[1]** El uso de medios documentales o electrónicos está prohibido, salvo la calculadora, no programable y no gráfica, que es para verificar las operaciones, *debiendo aparecer* todas ellas en las soluciones. **[2]** En la evaluación de sus competencias, ayuda saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento. Por ello, *es recomendable* que entregue los borradores de las soluciones, razonablemente organizados. **[3]** Usted es libre de entregar su examen; si no lo entrega, su calificación será «No presentado»; si lo entrega, escriba en la cabecera de su examen los números de las cuatro cuestiones que haya hecho (recuerde: la 9 es obligatoria, otras dos, también obligatorias, serán elegidas por sorteo y una última que usted elegirá libremente).

VERY IMPORTANT: **[1]** The use of documentary or electronic media is prohibited, except the calculator, neither programmable nor graphic, that is to check operations, which *have to appear* in the solutions. **[2]** In assessing your competencies, it helps to know more about your knowledge and learning potential. So, *it is therefore advisable* that you hand in also the drafts of the solutions, reasonably arranged. **[3]** You are free to hand in your exam; if you do not hand in it, your grade will be "Absent"; if you hand in it, print on the heading of your exam the numbers that identify the four questions you have done (remember: 9th is mandatory, another two, also mandatory, will be chosen by lot and one of your own choosing will be the fourth one).

1 (2,5 puntos / points).-

En la isla de los caballeros y truhanes hay dos clases de habitantes, los «caballeros», que siempre dicen la verdad y los «truhanes», que siempre mienten. Se supone que todo habitante de la isla es un caballero o un truhán. Había dos habitantes, A y B, de pie en el jardín delantero de una casa. Usted, que pasaba por allí, les preguntó: «¿Son ustedes caballeros o truhanes?»

a) A contestó: «Si B es un caballero, entonces yo soy un truhán». ¿Puede determinarse si A y B eran caballeros o truhanes? (1,25 p.)

b) Seguidamente, B dijo: «No crea a A; él miente». Con esta nueva información, ¿puede determinarse si A y B eran caballeros o truhanes? (1,25 p.)

On the island of knights and knaves there are two types of inhabitants, "knights" who always tell the truth and "knaves" who always lie. It is assumed that every inhabitant is either a knight or a knave. There were two inhabitants, A and B, standing together in the front yard of a house. You passed by and asked them, "Are you knights or knaves?"

(a) A answered, "If B is a knight then I am a knave." Can it be determined whether A and B were knights or knaves? (1.25 p.)

(b) Afterward, B said, "Don't believe A; he's lying." With this new information, can it be determined whether A and B were knights or knaves? (1.25 p.)

2 (2,5 puntos / points).-

Demuestre, mediante el procedimiento diagonal de Cantor, que $\mathbb{R}$ (números reales) no es un conjunto numerable.

Using Cantor's diagonal argument, prove that the real number set, $\mathbb{R}$, is not a countable set.

3 (2,5 puntos / points).-

Dos personas llevaban un cesto de huevos. Un caballo que pasó a su lado hizo un extraño y les asustó, cayéndose el cesto y rompiéndose todos los huevos. El cuidador del caballo, queriendo pagarles su pérdida, les preguntó cuántos huevos llevaban en el cesto. Ellas no se acordaban exactamente aunque recuerdan que al contarlos en manos de tres sobraban dos y en manos de cuatro, sobraban tres. Calcule el número de huevos, sabiendo que estaba entre 100 y 110, utilizando la teoría de las ecuaciones:

a) diofánticas; (1,25 p.)

b) en congruencias. (1,25 p.)

Two people were carrying a basket of eggs. A horse that passed by made a weird movement and they both got very scared by it. They dropped the basket and all the eggs broke. The horse carer, wishing to pay for their loss, asked them how many eggs were in their basket. They don't remember exactly, but they do recall that whether they took the eggs out in groups of three there were two eggs left over and if they took them out in groups of four there were three eggs left over. Knowing that the number of eggs was between 100 and 110, calculate that number using the theory of:

(a) diophantine equations; (1.25 p.)

(b) congruence equations. (1.25 p.)

4 (2,5 puntos / points).-

a) Enuncie el criterio general de divisibilidad (0,25 p.) y úselo para encontrar criterios de divisibilidad por 7, por 11 y por 13, en base diez. (1,25 p.)

b) Demuestre, utilizando a), que, en base diez, el número natural de seis cifras abcabc es divisible por 1001. (1 p.)

(a) Enunciate the general divisibility rule (0.25 p.) and use it to find out divisibility rules for 7, 11 and 13, in base ten. (1.25 p.)

(b) Using (a), prove that, in base ten, the 6-digit natural number abcabc is divisible by 1001. (1 p.)

5 (2,5 puntos / points).-

Emplee un razonamiento combinatorio para responder.

a) ¿De cuántas formas puede un computador repartir 4 tareas idénticas entre 3 computadores auxiliares? (1,25 p.)

b) ¿Y si no puede quedar ninguno fuera del reparto (esto es, todos deben tener una tarea asignada)? (1,25 p.)

Use a combinatorial reasoning to respond.

(a) In how many ways can a computer distribute 4 identical assignments to 3 additional computers? (1.25 p.)

(b) And if none of them can be left out of the distribution (i.e. all must have an assigned task)? (1.25 p.)

6 (2,5 puntos / points).-

Antes de un examen, un profesor repartió una lista con 12 posibles cuestiones. El examen constaba de 4 cuestiones de esas 12. Use un razonamiento combinatorio para responder.

a) Un estudiante solo tuvo tiempo de preparar 7 de las 12.

a.1) ¿Cuántas posibilidades le favorecieron? (1 p.)

a.2) ¿De un total de cuántas? (0,25 p.)

b) Si en opinión del profesor, había 2 cuestiones que no podían aparecer en el mismo examen, ¿cuál fue en realidad el total de posibilidades? (1,25 p.)

A teacher distributed a list of 12 possible exam questions prior to running it. The exam consisted of 4 questions out of those 12. Use a combinatorial reasoning to respond.

(a) A student has time only to prepare 7 out of the 12.

(a.1) How many possibilities favoured him/her? (1 p.)

(a.2) Out of how many? (0.25 p.)

(b) If, in the opinion of the teacher, there were 2 questions that cannot appear together in the same exam, how many possibilities there actually were in total? (1.25 p.)

Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
FURTHER MATHEMATICS
Examen final (1 de junio de 2017) / Final exam (June 1, 2017)
Tiempo máximo: **2 h. y 10 m.** / Maximum time: **2 h. and 10 m.**
Máxima puntuación: **10 puntos** / Top grade: **10 points**

Profesor / Teacher:
Juan Miguel León-Rojas

MUY IMPORTANTE: **[1]** El uso de medios documentales o electrónicos está prohibido, salvo la calculadora, no programable y no gráfica, que es para verificar las operaciones, *debiendo aparecer* todas ellas en las soluciones. **[2]** En la evaluación de sus competencias, ayuda saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento. Por ello, *es recomendable* que entregue los borradores de las soluciones, razonablemente organizados. **[3]** Usted es libre de entregar su examen; si no lo entrega, su calificación será «No presentado»; si lo entrega, escriba en la cabecera de su examen los números de las cuatro cuestiones que haya hecho (recuerde: la 9 es obligatoria, otras dos, también obligatorias, serán elegidas por sorteo y una última que usted elegirá libremente).

VERY IMPORTANT: **[1]** The use of documentary or electronic media is prohibited, except the calculator, neither programmable nor graphic, that is to check operations, which *have to appear* in the solutions. **[2]** In assessing your competencies, it helps to know more about your knowledge and learning potential. So, *it is therefore advisable* that you hand in also the drafts of the solutions, reasonably arranged. **[3]** You are free to hand in your exam; if you do not hand in it, your grade will be "Absent"; if you hand in it, print on the heading of your exam the numbers that identify the four questions you have done (remember: 9th is mandatory, another two, also mandatory, will be chosen by lot and one of your own choosing will be the fourth one).

7 (2,5 puntos / points).-

Notemos por $C_b(n)$ el número de cadenas de longitud $n \geq 1$, en base b, que no contienen dos dígitos consecutivos iguales.

a) Obtenga razonadamente una relación de recurrencia para $C_2(n)$, calcule su solución general y la particular correspondiente a esta situación. (1 p.)

b) Lo mismo para $b = 3$, esto es, obtenga razonadamente una relación de recurrencia para $C_3(n)$, calcule su solución general y la particular correspondiente a esta situación. (1 p.)

c) ¿Es extensible su razonamiento al caso de una base $b \geq 3$? Justifique su respuesta. (0,5 p.)

Let $C_b(n)$ the number of n-length strings ($n \geq 1$), in base b, which contain no two consecutive equal digits.

(a) Develop, reasonably, a recurrence relation for $C_2(n)$, calculate its general solution and the particular solution under this scenario. (1 p.)

(b) The same for $b = 3$, i.e. develop, reasonably, a recurrence relation for $C_3(n)$, calculate its general solution and the particular solution under this scenario. (1 p.)

(c) Does your reasoning apply to the case of a base $b \geq 3$? Justify your response. (0,5 p.)

8 (2,5 puntos / points).-

Una ONG sobre medio ambiente y conservación de la biodiversidad ha realizado un estudio sobre la evolución de dos especies, E_1 y E_2, que comparten un mismo territorio sometido a presión humana. El texto del informe incluye la siguiente descripción (los datos que se mencionan se recogen al finalizar cada año):

«Cada año, de la especie E_1 nacen tantos como individuos, de esa especie, había el año anterior y fallecen tantos como el doble de individuos de la especie E_2 había el año anterior, mientras que de la especie E_2, fallecen tantos como el doble de individuos, de esa especie, había el año anterior y nacen tantos como individuos había el año anterior de la especie E_1».

Supuesto que no hay inmigraciones ni emigraciones ni influyen factores externos que modifiquen sus crecimientos, se pide que usted:

a) escriba un sistema de ecuaciones recurrentes lineales que represente, según lo anterior, la relación entre los tamaños de las poblaciones, dos años consecutivos; (0,25 p.)

b) calcule la solución general de dicho sistema; (2 p.)

c) interprete dicha solución, informando del comportamiento a largo plazo de ambas poblaciones. (0,25 p.)

An environmental/biodiversity conservation NGO has made a study about the evolution of two species, E_1 and E_2, which share the same territory that is subject to human pressure. The text of the report includes the following description (the data referred to are compiled at the end of each year):

"Each year, in terms of species E_1, the number of individuals born is equal to the number of individuals of that species in the previous year and the number of individuals died is the double of individuals of species E_2 in the previous year, while in terms of species E_2, the number of individuals died is the double of individuals of that species in the previous year and the number of individuals born is equal to the number of individual of species E_1 in the previous year."

Assuming that neither immigration nor emigration nor extraneous factors influence their growths:

(a) write a system of linear recurrence equations which represents, on the basis of the above, the relation between the sizes of the populations, in two consecutive years; (0.25 p.)

(b) calculate the general solution of that system; (2 p.)

(c) interpret that solution, reporting about the long-term behaviour of the species. (0.25 p.)

9 (2,5 puntos / points).-

Sea la afirmación: «Lo hacemos nosotros y también vosotros. Aunque, en realidad, vosotros lo hacéis siempre que lo hacen ellos. Por tanto, no es cierto que nosotros lo hagamos siempre que lo hagáis vosotros».

a) Formalice en lógica proposicional dicha afirmación como una inferencia. Llámela $\mathcal{A}$. (0,5 p.)

b) Demuestre, mediante el método de las tablas semánticas, si $\mathcal{A}$ es o no es una inferencia válida. (1,5 p.)

c) Caso de que $\mathcal{A}$ sea válida, modifique la hipótesis o la tesis para que la inferencia modificada no sea válida y justifíquelo. Caso de que $\mathcal{A}$ no sea válida, identifique el(los) modelo(s) que proporciona(n) la(s) rama(s) abierta(s) y el conjunto de fórmulas bien formadas para el que lo(s) proporciona(n). (0,5 p.)

Consider the statement: "Both you and we do it. Though, indeed, you do it whenever they do it. Thus, it is not true that we do it whenever you do it."

(a) Formalize that statement, in propositional logic, as an inference. Name it $\mathcal{A}$. (0.5 p.)

(b) Using semantic tableaux, prove if $\mathcal{A}$ is a valid inference or not. (1.5 p.)

(c) In the event $\mathcal{A}$ is valid, modify the hypothesis or the conclusion to ensure that the modified inference is not valid and the reason for this. In the event $\mathcal{A}$ is not valid, identify the model(s) which are provided by the open branch(es) and the set of well-formed formulas for which it(they) is(are) provided for. (0.5 p.)

Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
FURTHER MATHEMATICS
Examen final (7 de julio de 2017) / Final exam (July 7, 2017)
Tiempo máximo: **2 h. y 10 m.** / Maximum time: **2 h. and 10 m.**
Máxima puntuación: **10 puntos** / Top grade: **10 points**

Profesor / Teacher:
Juan Miguel León-Rojas

MUY IMPORTANTE: **[1]** El uso de medios documentales o electrónicos está prohibido, salvo la calculadora, no programable y no gráfica, que es para verificar las operaciones, *debiendo aparecer* todas ellas en las soluciones. **[2]** En la evaluación de sus competencias, ayuda saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento. Por ello, *es recomendable* que entregue los borradores de las soluciones, razonablemente organizados. **[3]** Usted es libre de entregar su examen; si no lo entrega, su calificación será «No presentado»; si lo entrega, escriba en la cabecera de su examen los números de las cuatro cuestiones que haya hecho (recuerde: la 9 es obligatoria, otras dos, también obligatorias, serán elegidas por sorteo y una última que usted elegirá libremente).

VERY IMPORTANT: **[1]** The use of documentary or electronic media is prohibited, except the calculator, neither programmable nor graphic, that is to check operations, which *have to appear* in the solutions. **[2]** In assessing your competencies, it helps to know more about your knowledge and learning potential. So, *it is therefore advisable* that you hand in also the drafts of the solutions, reasonably arranged. **[3]** You are free to hand in your exam; if you do not hand in it, your grade will be "Absent"; if you hand in it, print on the heading of your exam the numbers that identify the four questions you have done (remember: 9th is mandatory, another two, also mandatory, will be chosen by lot and one of your own choosing will be the fourth one).

1 (2,5 puntos / points).-

En la isla de los caballeros y truhanes hay dos clases de habitantes, los «caballeros», que siempre dicen la verdad y los «truhanes», que siempre mienten. Se supone que todo habitante de la isla es un caballero o un truhán. Había tres habitantes, A, B y C, de pie en el jardín delantero de una casa. Usted, que pasaba por allí, les preguntó: «¿Son ustedes caballeros o truhanes?» Responda a las siguientes cuestiones, traduciéndolas al lenguaje de la lógica proposicional y utilizando métodos, estrategias o herramientas propias de la misma.

a) *A contestó: «Ninguno de nosotros es un truhán». ¿Puede determinarse si A, B y C eran caballeros o truhanes? (1,25 p.)*

b) *Seguidamente, B dijo: «Como mucho, uno de nosotros es un caballero». Con esta nueva información, ¿puede determinarse si A, B y C eran caballeros o truhanes? (1,25 p.)*

On the island of knights and knaves there are two types of inhabitants, "knights" who always tell the truth and "knaves" who always lie. It is assumed that every inhabitant is either a knight or a knave. There were three inhabitants, A, B and C, standing together in the front yard of a house. You passed by and asked them, 'Are you knights or knaves?' Answer the following questions, by translating them into the language of propositional logic and using some of its methods, strategies or tools.

(a) *A answered, "None of us is a knave." Can it be determined whether A, B and C were knights or knaves? (1.25 p.)*

(b) *Afterward, B said, "At most one of us is a knight." With this new information, can it be determined whether A, B and C were knights or knaves? (1.25 p.)*

2 (2,5 puntos / points).-

Sabiendo que $\mathbb{Z}$ (enteros) es un conjunto numerable y que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, demuestre que $\mathbb{Q}$ (racionales) es numerable.

Knowing that $\mathbb{Z}$ (integers) is a countable set and that the countable union of countable sets is countable, prove that $\mathbb{Q}$ (rationals) is countable.

3 (2,5 puntos / points).-

Use la teoría de relaciones de congruencias para responder.

a) *Demuestre que $21 \cdot 2^{5n+1} - 4 \cdot 3^{3n+1}$ es divisible por 5, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. (1,25 p.)*

b) *Calcule el resto de dividir $3^{6n+1} + 3^{2n+1} \cdot 19^{2n} - 3$ entre 28, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. (1,25 p.)*

Use congruence relation theory to respond.

(a) *Prove that, for any $n \in \mathbb{N}$, $21 \cdot 2^{5n+1} - 4 \cdot 3^{3n+1}$ is divisible by 5. (1.25 p.)*

(b) *Calculate the remainder of $3^{6n+1} + 3^{2n+1} \cdot 19^{2n} - 3$ (for any $n \in \mathbb{N}$), when it is divided by 28. (1.25 p.)*

4 (2,5 puntos / points).-

Una persona debe gastar exactamente 1234 euros en comprar objetos de dos tipos. Los objetos de tipo A cuestan 12 euros y los de tipo B, 34 euros, cada uno. Suponiendo que debe comprar al menos un objeto de cada tipo y usando la teoría de ecuaciones diofánticas, averigüe cuántos objetos de tipo A y B puede comprar. Proporcione todas las soluciones existentes.

A person must spend exactly 1234 euros on buying objects of two types. Type A items cost 12 euros each while type B items cost 34 euros each. Assuming that they must buy at least one object of each type and using diophantine equation theory, find out how many objects of each type they can buy. Provide all existing solutions.

5 (2,5 puntos / points).-

Emplee un razonamiento combinatorio para responder.

a) *Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. En base diez, ¿cuántos números de siete cifras son capicúas? (1,25 p.)*

b) *Supongamos una red en forma de polígono de n nodos (vértices). Calcule n, sabiendo que el número de aristas (lados + diagonales) es 253. (1,25 p.)*

Use a combinatorial reasoning to respond.

(a) *A number is palindrome if it reads the same from left to right and from right to left. In base ten, how many seven-digit numbers are palindromes? (1.25 p.)*

(b) *Let us assume a n sided polygon network (n-gon network). Calculate n, the number of nodes (vertices) of the network, knowing that the number of line segments (sides + diagonals) is 253. (1.25 p.)*

6 (2,5 puntos / points).-

Emplee un razonamiento combinatorio para responder.

a) *¿Cuántas palabras de siete letras pueden formarse con las 27 letras del alfabeto español si cada palabra contiene dos, tres o cinco vocales? (1,25 p.)*

b) *En una prueba de rendimiento, un computador central (CC) debe distribuir 100 tareas idénticas a un centro de datos de 30 computadores de tipo A y 20 computadores de tipo B, requiriéndose que cada computador de tipo A tenga al menos una tarea asignada y que cada computador de tipo B tenga al menos dos tareas asignadas. ¿De cuántas formas puede hacer CC tal distribución? (1,25 p.)*

Use a combinatorial reasoning to respond.

(a) *How many seven-letter words can be constructed by using the 27 letters of the Spanish alphabet if each word contains two, three, or five vowels? (1.25 p.)*

(b) *Within a performance testing, a central computer (CC) must distribute 100 identical tasks to a data center that consists of 30 computers of type A and 20 computers of type B, being required that each computer of type A has at least one task assigned and each computer of type B has at least two tasks assigned. In how many ways can CC makes such a distribution? (1.25 p.)*

Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
FURTHER MATHEMATICS
Examen final (7 de julio de 2017) / Final exam (July 7, 2017)
Tiempo máximo: **2 h. y 10 m.** / Maximum time: **2 h. and 10 m.**
Máxima puntuación: **10 puntos** / Top grade: **10 points**

Profesor / Teacher:
Juan Miguel León-Rojas

MUY IMPORTANTE: **[1]** El uso de medios documentales o electrónicos está prohibido, salvo la calculadora, no programable y no gráfica, que es para verificar las operaciones, *debiendo aparecer* todas ellas en las soluciones. **[2]** En la evaluación de sus competencias, ayuda saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento. Por ello, *es recomendable* que entregue los borradores de las soluciones, razonablemente organizados. **[3]** Usted es libre de entregar su examen; si no lo entrega, su calificación será «No presentado»; si lo entrega, escriba en la cabecera de su examen los números de las cuatro cuestiones que haya hecho (recuerde: la 9 es obligatoria, otras dos, también obligatorias, serán elegidas por sorteo y una última que usted elegirá libremente).

VERY IMPORTANT: **[1]** The use of documentary or electronic media is prohibited, except the calculator, neither programmable nor graphic, that is to check operations, which *have to appear* in the solutions. **[2]** In assessing your competencies, it helps to know more about your knowledge and learning potential. So, *it is therefore advisable* that you hand in also the drafts of the solutions, reasonably arranged. **[3]** You are free to hand in your exam; if you do not hand in it, your grade will be "Absent"; if you hand in it, print on the heading of your exam the numbers that identify the four questions you have done (remember: 9th is mandatory, another two, also mandatory, will be chosen by lot and one of your own choosing will be the fourth one).

7 (2,5 puntos / points).-

Consideremos una red en forma de polígono de n nodos (vértices), $n \geq 2$, y sea $N(n)$ el número de aristas (lados + diagonales).

a) Obtenga razonadamente una relación de recurrencia para $N(n)$. (0,5 p.)

b) Calcule su solución general. (1 p.)

c) Calcule la solución particular correspondiente a esta situación. (1 p.)

Let us consider a n sided polygon network (n-gon network), with n, the number of nodes (vertices), such that $n \geq 2$, and let $N(n)$ be the number of line segments (sides + diagonals).

(a) Develop, reasonably, a recurrence relation for $N(n)$. (0.5 p.)

(b) Calculate its general solution. (1 p.)

(c) Calculate the corresponding particular solution for this situation. (1 p.)

8 (2,5 puntos / points).-

La relación evolutiva de dos comunidades digitales en estudio, D_1 y D_2, viene dada por: «Al final de cada día: el tamaño (número de individuos) de D_1 es igual al tamaño que D_1 tenía el día anterior más el tamaño que D_2 tenía el día anterior más el número de días que han transcurrido desde el inicio del estudio; el tamaño de D_2 es igual al tamaño que D_1 tenía el día anterior más tres individuos nuevos, menos el tamaño que D_2 tenía el día anterior».

Supuesto que no existen factores externos que modifiquen sus crecimientos, se pide que usted:

a) escriba un sistema de ecuaciones recurrentes lineales que represente, según lo anterior, la relación entre los tamaños de las comunidades, dos días consecutivos; (0,25 p.)

b) calcule la solución general de dicho sistema. (2,25 p.)

The evolutionary relationships between two digital communities studied, D_1 and D_2, is determined by: "At the end of each day: the size (number of individuals) of D_1 is equal to the size of D_1 in the previous day plus the size of D_2 in the previous day plus the number of days from the outset of the study; on the other side, the size of D_2 is equal to the size of D_1 in the previous day plus three new individuals minus the size of D_2 in the previous day."

Assuming that no extraneous factors influence their growths,

(a) write a system of linear recurrence equations which represents, on the basis of the above, the relation between the sizes of the communities, in two consecutive days; (0.25 p.)

(b) calculate the general solution of that system. (2.25 p.)

9 (2,5 puntos / points).-

Un programa contiene dos tipos de componentes software, las correctas (se sabe que están libres de errores) y las incorrectas (se sabe que no están libres de errores). Toda componente del programa es de alguno de los dos tipos. El programa ha fallado. El análisis de la situación arroja lo siguiente:

i) Solo se sospecha de tres componentes, A, B y C y se sabe que al menos una es incorrecta.

ii) De ser A incorrecta, nunca podría fallar en solitario, fallaría junto al menos a otra componente.

iii) C es una componente correcta.

Con estos datos, un investigador concluye que B y C son correctas.

a) Formalice en lógica proposicional, como una inferencia, lo arrojado por el análisis junto a la conclusión del investigador. Sea $\mathcal{A}$ dicha inferencia. (0,5 p.)

b) Demuestre, mediante el método de las tablas semánticas, si $\mathcal{A}$ es o no es una inferencia válida. (1,5 p.)

c) Caso de que $\mathcal{A}$ sea válida, modifique la hipótesis o la tesis para que la inferencia modificada no sea válida y justifíquelo. Caso de que $\mathcal{A}$ no sea válida, identifique el(los) modelo(s) que proporciona(n) la(s) rama(s) abierta(s) y el conjunto de fórmulas bien formadas para el que lo(s) proporciona(n). (0,5 p.)

A program contains two types of software components, the correct ones (we know that they are error-free) and the incorrect ones (we know that they are not error-free). It is assumed that every component of the program is either correct or incorrect. The program has failed. The analysis of the situation reveals the following:

(i) Only three components, A, B and C, are under suspicion and at least one is known to be incorrect.

(ii) If it were A incorrect, it could never fail alone, it would fail along with at least one other component.

(iii) C is a correct component.

In the light of these data, a researcher concluded that B and C are correct components.

(a) Formalize in propositional logic, as an inference, what the analysis has revealed together with what the researcher has concluded. Let $\mathcal{A}$ be that inference. (0.5 p.)

(b) Using semantic tableaux, prove if $\mathcal{A}$ is a valid inference or not. (1.5 p.)

(c) In the event $\mathcal{A}$ is valid, modify the hypothesis or the conclusion to ensure that the modified inference is not valid and the reason for this. In the event $\mathcal{A}$ is not valid, identify the model(s) which are provided by the open branch(es) and the set of well-formed formulas for which it(they) is(are) provided for. (0.5 p.)

Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS/ FURTHER MATHEMATICS

Actividad intermedia de cualificación (10 de abril de 2018) **FILA A** /

Midterm qualifying activity (April 10, 2018) **WHITE**

Tiempo máximo: **2 h. y 30 m.** / Maximum time: **2 h. and 30 m.**

Máxima puntuación: **100 pts. (+20 pts. extra)** / Top grade: **100 pts. (+20 extra pts.)**

Profesor / Professor: Juan Miguel León-Rojas

POR FAVOR, PRIMERO LEA ESTO: **[0]** Escriba su nombre y número de DNI en *cada página*. **[1]** Esta actividad debe hacerse sin ayuda: *usted no puede tener* libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles ni otros dispositivos electrónicos o de comunicación, encima o cerca de usted; todos ellos deben ser guardados lejos y apagados si es el caso; si se observa que usted está usando material documental o un dispositivo electrónico o de comunicación, deberá abandonar la actividad y obtendrá una puntuación de cero. **[2]** Informe al profesor y excúsese por adelantado si necesita salir durante la actividad; de otro modo, deberá permanecer en la sala hasta que usted la termine. **[3]** Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero (el orden de las respuestas no importa). **[4]** No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, una respuesta incorrecta podrá obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentos sean claros y lógicamente sólidos. **[5]** Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización cuentan. **[6]** Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su participación en esta actividad no será calificada. **[7]** Si entrega sus hojas de respuestas, *es recomendable* que también entregue los borradores de las soluciones (eso sí, razonablemente organizados), ¿por qué?, porque ayuda a saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento, en la evaluación de sus competencias. **[8]** Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Si está nervioso/a, cierre sus ojos y respire profunda y prolongadamente cuatro veces seguidas (inhalar y exhalar cuenta como una vez); le ayudará a relajarse y concentrarse. **[•]** Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PLEASE READ FIRST: **[0]** Write your name and national ID number on *each page*. **[1]** This is a closed-book activity: you *are not allowed* to have books, notes, e-books, calculators, cell phones or any other communicating/electronic devices on or near your person during the activity; all of them must be put away and turned off if it is the case; if you are observed using any documentary or communication/electronic device you will be asked to drop the activity and you will have a credit score of zero. **[2]** Inform professor and present excuse in advance if you must leave while doing the activity; otherwise you are to be here until you finish doing it. **[3]** As you go over the questions, look for the easy ones and do them first (the order of the answers does not matter). **[4]** Do not simplify your answers, write legibly and explain your work, *showing all intermediate steps*; if your work is absent, illegible or your answer is given without justification, then no partial credit can be awarded; however, an incorrect answer may get partial credit as long as your arguments are clear and logically sound. **[5]** Please label, or define, any variables and notation you choose to work with; also explain how you are solving each question as you go along, for example, *stating clearly any theorem or result you use*; neatness, cleanliness and organization count. **[6]** You are free to hand in your answer papers; if you do not hand in them, your participation on this activity will not be scored. **[7]** If you hand in your answer papers, *it is advisable* that you hand in also your rough work on scratch paper (although it must be reasonably arranged), why?, because it helps to know more about your knowledge and learning potential, in assessing your competences. **[8]** You have previously solved similar questions. If you are nervous, close your eyes and breath long and deeply four times in a row (inhaling and exhaling count as one time); it will help you relax and focus during this activity. **[•]** I am hoping your efforts bear fruit. Do well!

Tema 1: La cuestión 3.a es obligatoria. Merece la pena intentar la cuestión 3.b, podría ayudarle a mejorar su calificación.

Theme 1: Question 3.a is mandatory. Question 3.b is worth a try, it might help you boost your grade.

1 (20 puntos / 20 points).-

Usar reglas de inferencia para construir un argumento válido para encontrar la solución a la siguiente cuestión.

En la isla de los caballeros y bribones hay dos clases de habitantes, los «caballeros», que siempre dicen la verdad y los «bribones», que siempre mienten. Se supone que todo habitante de la isla es un caballero o un bribón. De acuerdo con este viejo problema, tres de los habitantes —A, B y C— estaban de pie en un jardín. Un forastero que pasaba por allí le preguntó a A: «¿Es usted un caballero o un bribón?». A respondió, pero algo confusamente, por lo que el forastero no pudo entender lo que dijo. El forastero, entonces, preguntó a B: «¿Qué dijo A?». B respondió: «A dijo que es un bribón». A estas alturas, el tercer hombre, C, dijo: «No crea usted a B; ¡está mintiendo!». La cuestión es: ¿qué son B y C?

Use rules of inference to build a valid argument to find out the solution to the following question.

On the island of knights and knaves there are two types of inhabitants, "knights" who always tell the truth and "knaves" who always lie. It is assumed that every inhabitant is either a knight or a knave. According to this old problem, three of the inhabitants — A, B, and C — were standing together in a garden. A stranger passed by and asked A, "Are you a knight or a knave?" A answered, but rather indistinctly, so the stranger could not make out what he said. The stranger then asked B, "What did A say?" B replied, "A said that he is a knave." At this point the third man, C, said, "Don't believe B; he is lying!" The question is, what are B and C?

2 (20 puntos / 20 points).-

a) *Considere la relación binaria «calcular lo mismo que» en un conjunto de algoritmos de cálculo. Estudiar cómo estructura dicha relación tal conjunto, esto es, qué propiedades satisface dicha relación binaria de entre las siguientes:*
   - *a.1) reflexiva (1,6 pts.)*
   - *a.2) simétrica (1,6 pts.)*
   - *a.3) antisimétrica (1,6 pts.)*
   - *a.4) transitiva (1,6 pts.)*
   - *a.5) conexa. (1,6 pts.)*
   - *a.6) ¿Es una relación de equivalencia? (0,5 pts.); si lo es, ¿cuáles son las clases de equivalencia? (0,5 pts.) ¿Es una ordenación? (0,5 pts.); si lo es, ¿de qué tipo? (0,5 pts.)*

b) *Use la teoría de relaciones de congruencias para demostrar que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17. (10 pts.)*

(a) *Consider the binary relation «calculate the same as» on a set of calculation algorithms. Study how such set is structured by that relation, that is, what properties this binary relation satisfies from among the following:*
   - *(a.1) reflexive (1.6 pts.)*
   - *(a.2) symmetric (1.6 p.)*
   - *(a.3) antisymmetric (1.6 pts.)*
   - *(a.4) transitive (1.6 pts.)*
   - *(a.5) connectedness (total)(1.6 p.)*
   - *(a.6) Is it an equivalence relation? (0.5 pts.); if it is so, what are the equivalence classes? (0.5 pts.) Is it an ordering? (0.5 pts.); if it is so, what kind is it? (0.5 pts.)*

(b) *Use congruence relation theory to prove that: $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ is divisible by 17. (10 pts.)*

3 (10 puntos obligatorios + 10 puntos extra / 10 mandatory points + 10 extra points).-

En el conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, considere la ley de composición binaria: $\forall x, y \in A$, $x * y = x + y - x \cdot y$, siendo $+$, $-$ y $\cdot$ la suma, la diferencia y el producto habituales en $\mathbb{N}$.

a) *¿Es $(A; *)$ un semigrupo abeliano? (10 pts.) (Cuestión obligatoria)*

b) *¿Es $(A; *)$ un grupo abeliano? (10 pts.) (Puntos extra)*

Let the binary composition law on the set $A = \{0, 1, 2\}$ be defined by: $\forall x, y \in A$, $x * y = x + y - x \cdot y$, where $+$, $-$ and $\cdot$ are the usual addition, subtraction and product in $\mathbb{N}$.

(a) *Is $(A; *)$ an Abelian semigroup? (10 pts.) (Mandatory question)*

(b) *Is $(A; *)$ an Abelian group? (10 pts.) (Extra points)*

Tema 2: Las cuestiones 6.a.1 y 6.a.2 son obligatorias. Merece la pena intentar la cuestión 6.b, podría ayudarle a mejorar su calificación.

Theme 2: Questions 6.a.1 and 6.a.2 are mandatory. Question 6.b is worth a try, it might help you boost your grade.

4 (20 puntos / 20 points).-

Resolver: $\begin{cases} x+2y \equiv 4 \pmod 7 \\ 4x+3y \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$

Solve: $\begin{cases} x+2y \equiv 4 \pmod 7 \\ 4x+3y \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$

5 (20 puntos / 20 points).-

Se compró cierto número de objetos (entre 50 y 100) a 17 euros cada uno. De ellos, se venden unos cuantos a 35 euros cada uno, obteniéndose un beneficio de 123 euros. ¿Cuántos objetos faltan por vender? Resuélvase utilizando la teoría de las ecuaciones diofánticas.

A certain number of objects (between 50 and 100) were purchased for the price of 17 euros each. Some of them were sold for the price of 35 euros each, with a total gain of 123 euros. How many objects remain to be sold? Solve it using the theory of diophantine equations.

6 (10 puntos obligatorios + 10 puntos extra / 10 mandatory points + 10 extra points).-

a) a.1) Usando el criterio general de divisibilidad, hallar el criterio de divisibilidad por 6 en el sistema de numeración heptal (base 7). (8 pts.) (Cuestión obligatoria)

a.2) ¿Es divisible entre 6 el número heptal $1234321_{(7}$? (2 pts.) (Cuestión obligatoria)

b) Si no lo es, sustituir la cifra heptal 4 por otra cifra heptal X tal que el número heptal $123X321_{(7}$ sea divisible por 6. (10 pts.) (Puntos extra)

(a) (a.1) Using the general divisibility rule, find the divisibility rule by 6 in base-7 (the septenary numeral system). (8 pts.) (Mandatory question)

(a.2) Is the septenary number $1234321_{(7}$ divisible by 6? (2 pts.) (Mandatory question)

(b) If it is not, replace the septenary figure 4 by another septenary figure X such that the septenary number $123X321_{(7}$ is divisible by 6. (10 pts.) (Extra points)

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO: **[9]** Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, compruebe también que sus respuestas tienen sentido. **[10]** Este es el final de la actividad. Por favor, cuando se marche, llévese esta hoja, si quiere. **[•]** Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

PLEASE READ LAST: **[9]** When you have finished answering the questions, you may want to look over them to make sure you have not forgotten any of them and also over your answers to make sure you have not omitted anything you wanted to say. Please check also that your answers make sense. **[10]** This is the end of the activity. Please take this sheet with you as you leave, if you wish. **[•]** Thank you very much for your time, consideration and flexibility.

Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS/ FURTHER MATHEMATICS

Actividad intermedia de cualificación (10 de abril de 2018) FILA B /

Midterm qualifying activity (April 10, 2018) GREEN

Tiempo máximo: **2 h. y 30 m.** / Maximum time: **2 h. and 30 m.**

Máxima puntuación: **100 pts. (+20 pts. extra)** / Top grade: **100 pts. (+20 extra pts.)**

Profesor / Professor:
Juan Miguel León-Rojas

POR FAVOR, PRIMERO LEA ESTO: **[0]** Escriba su nombre y número de DNI en *cada página*. **[1]** Esta actividad debe hacerse sin ayuda: *usted no puede tener* libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles ni otros dispositivos electrónicos o de comunicación, encima o cerca de usted; todos ellos deben ser guardados lejos y apagados si es el caso; si se observa que usted está usando material documental o un dispositivo electrónico o de comunicación, deberá abandonar la actividad y obtendrá una puntuación de cero. **[2]** Informe al profesor y excúsese por adelantado si necesita salir durante la actividad; de otro modo, deberá permanecer en la sala hasta que usted la termine. **[3]** Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero (el orden de las respuestas no importa). **[4]** No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, una respuesta incorrecta podrá obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentos sean claros y lógicamente sólidos. **[5]** Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización cuentan. **[6]** Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su participación en esta actividad no será calificada. **[7]** Si entrega sus hojas de respuestas, *es recomendable* que también entregue los borradores de las soluciones (eso sí, razonablemente organizados), ¿por qué?, porque ayuda a saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento, en la evaluación de sus competencias. **[8]** Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Si está nervioso/a, cierre sus ojos y respire profunda y prolongadamente cuatro veces seguidas (inhalar y exhalar cuenta como una vez); le ayudará a relajarse y concentrarse. **[•]** Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PLEASE READ FIRST: **[0]** Write your name and national ID number on *each page*. **[1]** This is a closed-book activity: you *are not allowed* to have books, notes, e-books, calculators, cell phones or any other communicating/electronic devices on or near your person during the activity; all of them must be put away and turned off if it is the case; if you are observed using any documentary or communication/electronic device you will be asked to drop the activity and you will have a credit score of zero. **[2]** Inform professor and present excuse in advance if you must leave while doing the activity; otherwise you are to be here until you finish doing it. **[3]** As you go over the questions, look for the easy ones and do them first (the order of the answers does not matter). **[4]** Do not simplify your answers, write legibly and explain your work, *showing all intermediate steps*; if your work is absent, illegible or your answer is given without justification, then no partial credit can be awarded; however, an incorrect answer may get partial credit as long as your arguments are clear and logically sound. **[5]** Please label, or define, any variables and notation you choose to work with; also explain how you are solving each question as you go along, for example, *stating clearly any theorem or result you use*; neatness, cleanliness and organization count. **[6]** You are free to hand in your answer papers; if you do not hand in them, your participation on this activity will not be scored. **[7]** If you hand in your answer papers, *it is advisable* that you hand in also your rough work on scratch paper (although it must be reasonably arranged), why?, because it helps to know more about your knowledge and learning potential, in assessing your competences. **[8]** You have previously solved similar questions. If you are nervous, close your eyes and breath long and deeply four times in a row (inhaling and exhaling count as one time); it will help you relax and focus during this activity. **[•]** I am hoping your efforts bear fruit. Do well!

Tema 1: La cuestión 3.a es obligatoria. Una vez resuelta la cuestión 3.a, merece la pena intentar la cuestión 3.b, podría ayudarle a mejorar su calificación.

Theme 1: Question 3.a is mandatory. Once question 3.a has been solved, question 3.b is worth a try, it might help you boost your grade.

1 (20 puntos / 20 points).-

Sea la siguiente afirmación: «Dados dos sucesos, del hecho de que ocurra alguno de ellos, siempre es posible inferir que ocurren ambos». Se pide:

a) Formalizar en lógica proposicional dicha afirmación como una inferencia. Llámela $\mathcal{A}$. (2 pts.)

b) Demostrar, mediante el método de las tablas semánticas, si $\mathcal{A}$ es o no es una inferencia válida. (12 pts.)

c) Caso de que $\mathcal{A}$ sea válida, modificar la hipótesis o la tesis para que la inferencia modificada no sea válida y justifíquelo. Caso de que $\mathcal{A}$ no sea válida, identificar el/los modelo/s que proporciona/n la/s rama/s abierta/s y el conjunto de fórmulas bien formadas para el que lo/s proporciona/n. (2 pts.)

d) Caso de que existan modelos, utilizar algún método, estrategia o herramienta de la Lógica Proposicional para demostrar que lo son. (2 pts.)

e) Caso de que existan modelos, expresar en español los contraargumentos —proporcionados por tales modelos— que permiten refutar la inferencia $\mathcal{A}$. (2 pts.)

Let be the following statement: "Given two events, by virtue of the fact that one of them is happening, it can always be inferred that both events are happening." For it, do the following:

(a) Formalize that statement, in propositional logic, as an inference. Name it $\mathcal{A}$. (2 pts.)

(b) Using semantic tableaux, prove if $\mathcal{A}$ is a valid inference or not. (12 pts.)

(c) In the event $\mathcal{A}$ is valid, modify the hypothesis or the conclusion to ensure that the modified inference is not valid and the reason for this. In the event $\mathcal{A}$ is not valid, identify the model(s) which are provided by the open branch(es) and the set of well-formed formulas for which it(they) is(are) provided for. (2 pts.)

(d) In the event any model does exist, use some of the propositional logic own methods, strategies or tools to prove that it is the case. (2 pts.)

(e) In the event any model does exist, express in English the counterarguments — which are provided by those models — permitting rebuttal of the inference $\mathcal{A}$. (2 pts.)

2 (20 puntos / 20 points).-

a) Considere la relación binaria «calcular lo mismo que» en un conjunto de algoritmos de cálculo. Estudiar cómo estructura dicha relación tal conjunto, esto es, qué propiedades satisface dicha relación binaria de entre las siguientes:

a.1) reflexiva (1,6 pts.) *a.2) simétrica (1,6 pts.)*

a.3) antisimétrica (1,6 pts.) *a.4) transitiva (1,6 pts.)*

a.5) conexa. (1,6 pts.) *a.6) ¿Es una relación de equivalencia? (0,5 pts.); si lo es, ¿cuáles son las clases de equivalencia? (0,5 pts.) ¿Es una ordenación? (0,5 pts.); si lo es, ¿de qué tipo? (0,5 pts.)*

b) Use la teoría de relaciones de congruencias para demostrar que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17. (10 pts.)

(a) Consider the binary relation «calculate the same as» on a set of calculation algorithms. Study how such set is structured by that relation, that is, what properties this binary relation satisfies from among the following:

(a.1) reflexive (1.6 pts.) *(a.2) symmetric (1.6 p.)*

(a.3) antisymmetric (1.6 pts.) *(a.4) transitive (1.6 pts.)*

(a.5) connectedness (total)(1.6 p.) *(a.6) Is it an equivalence relation? (0.5 pts.); if it is so, what are the equivalence classes? (0.5 pts.) Is it an ordering? (0.5 pts.); if it is so, what kind is it? (0.5 pts.)*

(b) Use congruence relation theory to prove that: $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ is divisible by 17. (10 pts.)

3 (10 puntos obligatorios + 10 puntos extra / 10 mandatory points + 10 extra points).-

En el conjunto $A = \{0, -1, -2\}$, considere la ley de composición binaria: $\forall x, y \in A$, $x * y = x + y + x \cdot y$, siendo $+$ y $\cdot$ la suma y el producto habituales en $\mathbb{N}$.

a) ¿Es $(A; *)$ un semigrupo abeliano? (10 pts.) (Cuestión obligatoria)

b) ¿Es $(A; *)$ un grupo abeliano? (10 pts.) (Puntos extra)

Let the binary composition law on the set $A = \{0, -1, -2\}$ be defined by: $\forall x, y \in A$, $x * y = x + y + x \cdot y$, where $+$ and $\cdot$ are the usual addition and product in $\mathbb{N}$.

(a) Is $(A; *)$ an Abelian semigroup? (10 pts.) (Mandatory question)

(b) Is $(A; *)$ an Abelian group? (10 pts.) (Extra points)

Tema 2: Las cuestiones 6.a.1 y 6.a.2 son obligatorias. Una vez resueltas las cuestiones 6.a.1 y 6.a.2, merece la pena intentar la cuestión 6.b, podría ayudarle a mejorar su calificación.

Theme 2: Questions 6.a.1 and 6.a.2 are mandatory. Once questions 6.a.1 and 6.a.2 have been solved, question 6.b is worth a try, it might help you boost your grade.

4 (20 puntos / 20 points).-

Resolver: $25x \equiv 15 \pmod{120}$.

Solve: $25x \equiv 15 \pmod{120}$.

5 (20 puntos / 20 points).-

Hurgando por aquí y allá, recogimos 17 *monedas de* 2 *euros. Con ellas, nos encaminamos a una primera tienda a comprar ese primer objeto que costaba* 11 *euros. La persona encargada nos dijo que ya había cerrado la caja y que solo tenía* 4 *billetes de* 5 *euros para poder darnos el cambio. ¿Pudimos comprar el objeto por su precio exacto? Resuélvase esta cuestión utilizando la teoría de las ecuaciones diofánticas.*

Rummaging around here and there, we collected seventeen 2*-euro coins. With them, we went to a first store to buy that first object that cost* 11 *euros. The person in charge told us that the cash desk closing had already happened and that s/he only had four* 5*-euro banknotes to give change. Could we buy the object for its exact price? Solve this question using the theory of diophantine equations.*

6 (10 puntos obligatorios + 10 puntos extra / 10 mandatory points + 10 extra points).-

a) *a.1) Usando el criterio general de divisibilidad, hallar el criterio de divisibilidad por* 3 *en el sistema de numeración heptal (base* 7*). (*8 *pts.) (*Cuestión obligatoria*)*

a.2) ¿Es divisible entre 3 *el número heptal* $1234321_{(7}$*? (*2 *pts.) (*Cuestión obligatoria*)*

b) *Si no lo es, sustituir la cifra heptal* 4 *por otra cifra heptal* X *tal que el número heptal* $123X321_{(7}$ *sea divisible por* 3*. (*10 *pts.) (*Puntos extra*)*

(a) *(a.1) Using the general divisibility rule, find the divisibility rule by* 3 *in base-*7 *(the septenary numeral system). (*8 *pts.) (*Mandatory question*)*

(a.2) Is the septenary number $1234321_{(7}$ *divisible by* 3*? (*2 *pts.) (*Mandatory question*)*

(b) *If it is not, replace the septenary figure* 4 *by another septenary figure* X *such that the septenary number* $123X321_{(7}$ *is divisible by* 3*. (*10 *pts.) (*Extra points*)*

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO: **[9]** Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, compruebe también que sus respuestas tienen sentido. **[10]** Este es el final de la actividad. Por favor, cuando se marche, llévese esta hoja, si quiere. **[•]** Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

PLEASE READ LAST: **[9]** When you have finished answering the questions, you may want to look over them to make sure you have not forgotten any of them and also over your answers to make sure you have not omitted anything you wanted to say. Please check also that your answers make sense. **[10]** This is the end of the activity. Please take this sheet with you as you leave, if you wish. **[•]** Thank you very much for your time, consideration and flexibility.

Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS/ FURTHER MATHEMATICS

Examen final ordinario (24 de mayo de 2018) | /

Spring final exam (May 24, 2018) |

Tiempo máximo: **2 h. y 30 m.** / Maximum time: **2 h. and 30 m.**

Máxima puntuación: **100 pts. (+20 pts. extra)** / Top grade: **100 pts. (+20 extra pts.)**

Profesor / Professor:
Juan Miguel León-Rojas

POR FAVOR, PRIMERO LEA ESTO: **[0]** Escriba su nombre y número de DNI en *cada página*. **[1]** Este examen debe hacerse sin ayuda: *usted no puede tener* libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, teléfonos inteligentes, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, relojes inteligentes ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de usted; todos ellos deben ser guardados lejos y apagados si es el caso; si se observa que usted está usando material documental o un dispositivo de almacenamiento o comunicación, deberá abandonar el examen y obtendrá una calificación de «Suspenso (0)». **[2]** Informe al profesor y excúsese por adelantado si necesita salir durante el examen; de otro modo, deberá permanecer en la sala hasta que usted lo termine. **[3]** Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero (el orden de las respuestas no importa). **[4]** No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, una respuesta incorrecta podrá obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentos sean claros y lógicamente sólidos. **[5]** Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización cuentan. **[6]** Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su calificación en actas será «No presentado». **[7]** Si entrega sus hojas de respuestas, *es recomendable* que también entregue los borradores de las soluciones (eso sí, razonablemente organizados), ¿por qué?, porque ayuda a saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento, en la evaluación de sus competencias. **[8]** Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Si está nerviosa/o, cierre sus ojos y respire profunda y prolongadamente cuatro veces seguidas (inhalar y exhalar cuenta como una vez); le ayudará a relajarse y concentrarse. **[•]** Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PLEASE READ FIRST: **[0]** Write your name and national ID number on *each page*. **[1]** This is a closed-book exam: you *are not allowed* to have books, notes, e-books, calculators, cell phones, smartphones, PDAs, tablets, phablets, pagers, .mp3/4/.../n players, smartwatches or any other communicating/storage devices on or near your person during the exam; all of them must be put away and turned off if it is the case; if you are observed using any documentary or communication/storage device you will be asked to drop the exam and you will have a credit score of "*Suspenso (0)*" (Fail [0]). **[2]** Inform professor and present excuse in advance if you must leave while doing the exam; otherwise you are to be here until you finish doing it. **[3]** As you go over the questions, look for the easy ones and do them first (the order of the answers does not matter). **[4]** Do not simplify your answers, write legibly and explain your work, *showing all intermediate steps*; if your work is absent, illegible or your answer is given without justification, then no partial credit can be awarded; however, an incorrect answer may get partial credit as long as your arguments are clear and logically sound. **[5]** Please label, or define, any variables and notation you choose to work with; also explain how you are solving each question as you go along, for example, *stating clearly any theorem or result you use*; neatness, cleanliness and organization count. **[6]** You are free to hand in your answer papers; if you do not hand in them, your grade will be "*No presentado*" (Absent). **[7]** If you hand in your answer papers, *it is advisable* that you hand in also your rough work on scratch paper (although it must be reasonably arranged), why?, because it helps to know more about your knowledge and learning potential, in assessing your competences. **[8]** You have previously solved similar questions. If you are nervous, close your eyes and breath long and deeply four times in a row (inhaling and exhaling count as one time); it will help you relax and focus during this exam. **[•]** I am hoping your efforts bear fruit. Do well!

PARTE 1 (50 puntos + 10 puntos extra): Responda solo a 3 de las cuatro cuestiones siguientes. Merece la pena que intente hacerlas completas; los 10 puntos extra podrían ayudarle a mejorar su calificación.

PART 1 (50 points + 10 extra points): Answer only 3 out of the four following questions. Attempt solving them entirely is worth a try; the 10 extra points might help you boost your grade.

1 (20 puntos / 20 points).-

Sea el siguiente argumento: «Si hay menos automóviles en las carreteras, la contaminación será aceptable. O bien tenemos menos automóviles en las carreteras, o bien se tendría que cobrar por el uso de las carreteras, o bien ambas cosas. Si se cobra por usar las carreteras, la temperatura aumentará en verano hasta un nivel insoportable. Este verano la temperatura está resultando ser bastante agradable. La conclusión es ineludible: la contaminación es aceptable». Se pide:

a) formalizarlo en lógica proposicional (4 pts.)

y demostrar su validez:

b) mediante una demostración por contradicción (reducción al absurdo); (8 pts.)

c) usando el método de las tablas semánticas. (8 pts.)

Let be the following argument: "If there are fewer car on the roads the pollution will be acceptable. Either we have fewer cars on the road or there should be road pricing, or both. If there is road pricing the summer will be unbearably hot. The summer is actually turning out to be quite cool. The conclusion is inescapable: pollution is acceptable." You are required to:

(a) formalize it in propositional logic (4 pts.)

and prove its validity:

*(b) making a proof by contradiction (*reductio ad absurdum*); (8 pts.)*

(c) using the semantic tableaux method. (8 pts.)

2 (20 puntos / 20 points).-

Una relación binaria R en un conjunto A se dice que es circular en A precisamente si $\forall x, y, z \in A,\ xRy \wedge yRz \implies zRx$.

a) Demostrar que toda relación de equivalencia en un conjunto es circular en dicho conjunto. (5 pts.)

b) Demostrar que no toda relación circular en un conjunto es de equivalencia en dicho conjunto. (5 pts.)

c) Averiguar qué necesita satisfacer una relación circular para ser de equivalencia. Demostrarlo. (10 pts.)

A binary relation R on a set A is called circular on A if $\forall x, y, z \in A,\ xRy \wedge yRz \implies zRx$.

(a) Prove that any equivalence relation on a set is circular on that set. (5 pts.)

(b) Prove that not every circular relation on a set is an equivalence relation on that set. (5 pts.)

(c) Find out what a circular relation needs to satisfy to be an equivalence relation. Prove it. (10 pts.)

3 (20 puntos / 20 points).-

¿Cómo podríamos distribuir 100 litros de agua en un total de 40 recipientes varios, de 1, 4 y 12 litros? Resuélvase utilizando la teoría de las ecuaciones diofánticas.

How could we distribute 100 liters of water in a total of 40 different containers of 1, 4 and 12 liters? Solve it using the theory of diophantine equations.

4 (20 puntos / 20 points).-

a) a.1) Usando el criterio general de divisibilidad, hallar el criterio de divisibilidad por 2 en el sistema de numeración heptal (base 7). (8 pts.)

a.2) Utilizar el criterio de divisibilidad hallado para averiguar si el número heptal $12321_{(7}$ es divisible entre 2. (2 pts.)

b) Si no lo es, usar el criterio de divisibilidad hallado para sustituir la cifra heptal 3 por otra cifra heptal X tal que el número heptal $12X21_{(7}$ sea divisible por 2. (10 pts.)

(a) (a.1) Using the general divisibility rule, find the divisibility rule by 2 in base-7 (the septenary numeral system). (8 pts.)

(a.2) Use the divisibility rule found to find out if the septenary number $12321_{(7}$ is divisible by 2. (2 pts.)

(b) If it is not, use the divisibility rule found to replace the septenary figure 3 by another septenary figure X such that the septenary number $12X21_{(7}$ is divisible by 2. (10 pts.)

PARTE 2 ***Dele la vuelta a la hoja.*** ↬

PART 2 ***Turn the sheet over.*** ↬

PARTE 2 (50 puntos + 10 puntos extra): Responda solo a 3 de las cuatro cuestiones siguientes. Merece la pena que intente hacerlas completas; los 10 puntos extra podrían ayudarle a mejorar su calificación.

PART 2 (50 points + 10 extra points): Answer only 3 out of the four following questions. Attempt solving them entirely is worth a try; the 10 extra points might help you boost your grade.

Para las dos cuestiones siguientes, se exige modelizar detalladamente las situaciones descritas como problemas de distribución/ocupación y resolverlas según la teoría correspondiente.

For the following two questions, it is required to model in detail the situations described as distribution/occupancy problems and solve them according to the corresponding theory.

5 (20 puntos / 20 points).-

Tres personas viajan en una guagua (como ellas llaman al autobús) que tiene siete paradas. ¿De cuántas maneras pueden apearse en los siguientes casos?

a) Si a lo sumo baja una persona por parada,
- *a.1) pudiendo distinguirse las personas entre sí, (5 pts.)*
- *a.2) no pudiendo distinguirse las personas entre sí (por ejemplo, llevan disfraces idénticos); (5 pts.)*

b) sin restricciones, pero
- *b.1) pudiendo distinguirse las personas entre sí, (5 pts.)*
- *b.2) no pudiendo distinguirse las personas entre sí (por ejemplo, llevan disfraces idénticos). (5 pts.)*

Three people are travelling in a guagua *(how they call the bus) that has seven stops. How many ways can they get off in the following cases?*

(a) If at most one person gets off at each stop,
- *(a.1) being able to distinguish people from each other, (5 pts.)*
- *(a.2) not being able to distinguish people from each other, (for instance, they are disguised in identical suits); (5 pts.)*

(b) without restrictions, but
- *(b.1) being able to distinguish people from each other, (5 pts.)*
- *(b.2) not being able to distinguish people from each other, (for instance, they are disguised in identical suits). (5 pts.)*

6 (20 puntos / 20 points).-

¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$, tales que x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 satisfacen:

a) $x_1 \geq 1$?, (6,66 pts.)

b) $x_i \geq 2$, para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?, (6,66 pts.)

c) $0 \leq x_1 \leq 10$? (6,66 pts.)

How many non negative integer solutions does the equation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ have, such that x_1, x_2, x_3, x_4 and x_5 satisfy:

(a) $x_1 \geq 1$?, (6.66 pts.)

(b) $x_i \geq 2$, where $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?, (6.66 pts.)

(c) $0 \leq x_1 \leq 10$? (6.66 pts.)

Para las dos cuestiones siguientes, se exige modelizar detalladamente, determinando una fórmula explícita, las situaciones descritas mediante ecuaciones en diferencias (relaciones de recurrencia) y resolverlas según la teoría correspondiente.

For the following two questions, it is required to model in detail, establishing an explicit formula, the situations described by means of difference equations (recurrence relations) and solve them according to the corresponding theory.

7 (20 puntos / 20 points).-

Supóngase un número ilimitado de coches y motos y un aparcadero con una fila de n espacios para aparcar motos grandes. Calcular el número de formas de estacionarlos en dicha fila teniendo en cuenta que debe ocurrir a la vez que: i) cada moto ocupa un espacio y cada coche dos, ii) las motos son idénticas entre sí y también los coches y iii) se tienen que ocupar todos los espacios.

Assume an unlimited number of cars and motorcycles and a parking lot with a row of n sized big motorcycle parking spaces. Calculate the number of ways to park them in such row taking into account that it must occur at the same time that: (i) each motorcycle takes up one parking space and each car two, (ii) motorcycles are identical to each other and also cars and (iii) all spaces must be taken up.

8 (20 puntos / 20 points).-

Calcular el número de cadenas, c_n, de $\{0, 1, 2\}$, de longitud n, que contienen un número par de unos.

Calculate the number of strings c_n, over $\{0, 1, 2\}$ of length n that contain an even number of 1's.

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO: **[9]** Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, compruebe también que sus respuestas tienen sentido. **[10]** Este es el final del examen. Por favor, cuando se marche, llévese esta hoja, si quiere. **[•]** Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

PLEASE READ LAST: **[9]** When you have finished answering the questions, you may want to look over them to make sure you have not forgotten any of them and also over your answers to make sure you have not omitted anything you wanted to say. Please check also that your answers make sense. **[10]** This is the end of the exam. Please take this sheet with you as you leave, if you wish. **[•]** Thank you very much for your time, consideration and flexibility.

Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS / FURTHER MATHEMATICS

Examen final extraordinario (29 de junio de 2018) | / Summer final exam (June 29, 2018) |

Tiempo máximo: **2 h. y 30 m.** / Maximum time: **2 h. and 30 m.**

Máxima puntuación: **100 pts. (+20 pts. extra)** / Top grade: **100 pts. (+20 extra pts.)**

Profesor / Professor: Juan Miguel León-Rojas

POR FAVOR, PRIMERO LEA ESTO: **[0]** Escriba su nombre y número de DNI en *cada página*. **[1]** Este examen debe hacerse sin ayuda: *usted no puede tener* libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, teléfonos inteligentes, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, relojes inteligentes ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de usted; todos ellos deben ser guardados lejos y apagados si es el caso; si se observa que usted está usando material documental o un dispositivo de almacenamiento o comunicación, deberá abandonar el examen y obtendrá una calificación de «Suspenso (0)». **[2]** Informe al profesor y excúsese por adelantado si necesita salir durante el examen; de otro modo, deberá permanecer en la sala hasta que usted lo termine. **[3]** Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero (el orden de las respuestas no importa). **[4]** No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, una respuesta incorrecta podrá obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentos sean claros y lógicamente sólidos. **[5]** Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización cuentan. **[6]** Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su calificación en actas será «No presentado». **[7]** Si entrega sus hojas de respuestas, *es recomendable* que también entregue los borradores de las soluciones (eso sí, razonablemente organizados), ¿por qué?, porque ayuda a saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento, en la evaluación de sus competencias. **[8]** Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Si está nerviosa/o, cierre sus ojos y respire profunda y prolongadamente cuatro veces seguidas (inhalar y exhalar cuenta como una vez); le ayudará a relajarse y concentrarse. **[•]** Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PLEASE READ FIRST: **[0]** Write your name and national ID number on *each page*. **[1]** This is a closed-book exam: you *are not allowed* to have books, notes, e-books, calculators, cell phones, smartphones, PDAs, tablets, phablets, pagers, .mp3/4/.../n players, smartwatches or any other communicating/storage devices on or near your person during the exam; all of them must be put away and turned off if it is the case; if you are observed using any documentary or communication/storage device you will be asked to drop the exam and you will have a credit score of "*Suspenso (0)*" (Fail [0]). **[2]** Inform professor and present excuse in advance if you must leave while doing the exam; otherwise you are to be here until you finish doing it. **[3]** As you go over the questions, look for the easy ones and do them first (the order of the answers does not matter). **[4]** Do not simplify your answers, write legibly and explain your work, *showing all intermediate steps*; if your work is absent, illegible or your answer is given without justification, then no partial credit can be awarded; however, an incorrect answer may get partial credit as long as your arguments are clear and logically sound. **[5]** Please label, or define, any variables and notation you choose to work with; also explain how you are solving each question as you go along, for example, *stating clearly any theorem or result you use*; neatness, cleanliness and organization count. **[6]** You are free to hand in your answer papers; if you do not hand in them, your grade will be "*No presentado*" (Absent). **[7]** If you hand in your answer papers, *it is advisable* that you hand in also your rough work on scratch paper (although it must be reasonably arranged), why?, because it helps to know more about your knowledge and learning potential, in assessing your competences. **[8]** You have previously solved similar questions. If you are nervous, close your eyes and breath long and deeply four times in a row (inhaling and exhaling count as one time); it will help you relax and focus during this exam. **[•]** I am hoping your efforts bear fruit. Do well!

PARTE 1 (50 puntos + 10 puntos extra): Responda solo a 3 de las cuatro cuestiones siguientes. Merece la pena que intente hacerlas completas; los 10 puntos extra podrían ayudarle a mejorar su calificación.

PART 1 (50 points + 10 extra points): Answer only 3 out of the four following questions. Attempt solving them entirely is worth a try; the 10 extra points might help you boost your grade.

1 (20 puntos / 20 points).-

Sea el siguiente argumento: «Sabemos que Cala viene siempre que viene Abigail. También sabemos que Cala viene si viene Balbina. Y nos han dicho que es seguro que una de las dos, Abigail o Balbina, va a venir. Así que también es seguro que Cala vendrá». Se pide:

a) su formalización en lógica proposicional; (4 pts.)

b) demostrar su validez:

b.1) mediante una demostración por contradicción (reducción al absurdo); (8 pts.)

b.2) usando el método de las tablas semánticas. (8 pts.)

Let be the following argument: "We know that Cala comes whenever Abigail comes. We also know that Cala comes if Balbina comes. And we have been told that at least one of the two, Abigail or Balbina, will come. So it is also sure that Cala will come." You are required to:

(a) formalize it in propositional logic; (4 pts.)

(b) prove its validity:

*(b.1) making a proof by contradiction (*reductio ad absurdum*); (8 pts.)*

(b.2) using the semantic tableaux method. (8 pts.)

2 (20 puntos / 20 points).-

En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, se define la relación binaria R: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. (12 pts.)

b) Utilizar la definición de clase de equivalencia para encontrar todos los números enteros pertenecientes a la clase de equivalencia de $a \in \mathbb{Z}$. (8 pts.)

Let R be the binary relation on $\mathbb{Z}$, the set of integers, defined by: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

(a) Prove that R is an equivalence relation on $\mathbb{Z}$. (12 pts.)

(b) Use the equivalence class definition to find all the integers belonging to the equivalence class of $a \in \mathbb{Z}$. (8 pts.)

3 (20 puntos / 20 points).-

Sea n un número entero positivo menor que 60 y sean a, b y c los restos de dividir n entre 3, 4 y 5, respectivamente. Utilizar el teorema chino de los restos para demostrar que n es el resto de dividir $40a + 45b + 36c$ entre 60.

Let n be a positive integer number less than 60 and let a, b and c be the remainders of dividing n by 3, 4 and 5, respectively. Use the Chinese remainder theorem to prove that n is the remainder of dividing $40a + 45b + 36c$ by 60.

4 (20 puntos / 20 points).-

a) Usando el criterio general de divisibilidad, hallar el criterio de divisibilidad por 5 en el sistema de numeración nonario (base 9). (8 pts.)

b) Utilizar el criterio de divisibilidad hallado para averiguar si el número nonario $33333_{(9}$ es divisible entre 5. (2 pts.)

c) Si no lo es, usar el criterio de divisibilidad hallado para averiguar para qué cifras nonarias X, el número nonario $33X33_{(9}$ es divisible por 5. (10 pts.)

(a) Using the general divisibility rule, find the divisibility rule by 5 in base-9 (the nonary numeral system). (8 pts.)

(b) Use the divisibility rule found to find out if the nonary number $33333_{(9}$ is divisible by 5. (2 pts.)

(c) If it is not, use the divisibility rule found to find out what are the nonary figures X such that the nonary number $33X33_{(9}$ is divisible by 5. (10 pts.)

PARTE 2 ***Dele la vuelta a la hoja.*** ↬

PART 2 ***Turn the sheet over.*** ↬

PARTE 2 (50 puntos + 10 puntos extra): Responda solo a 3 de las cuatro cuestiones siguientes. Merece la pena que intente hacerlas completas; los 10 puntos extra podrían ayudarle a mejorar su calificación.

PART 2 (50 points + 10 extra points): Answer only 3 out of the four following questions. Attempt solving them entirely is worth a try; the 10 extra points might help you boost your grade.

PARA LAS DOS CUESTIONES SIGUIENTES, se exige modelizar detalladamente las situaciones descritas como problemas de distribución/ocupación y resolverlas según la teoría correspondiente.

FOR THE FOLLOWING TWO QUESTIONS, it is required to model in detail the situations described as distribution/occupancy problems and solve them according to the corresponding theory.

5 (20 puntos / 20 points).-

Se quieren repartir 25 sillas en cuatro habitaciones vacías. ¿De cuántas formas puede hacerse en los siguientes casos?

a) No puede dejarse ninguna habitación sin sillas,
- *a.1) pudiendo distinguirse las sillas entre sí, (5 pts.)*
- *a.2) no pudiendo distinguirse las sillas entre sí; (5 pts.)*

b) pueden dejarse habitaciones sin sillas,
- *b.1) pudiendo distinguirse las sillas entre sí, (5 pts.)*
- *b.2) no pudiendo distinguirse las sillas entre sí. (5 pts.)*

It is wanted to distribute 25 chairs in four empty rooms. How many ways can they be distributed in the following cases?

(a) There can not be any room without chairs,
- *(a.1) being able to distinguish chairs from each other, (5 pts.)*
- *(a.2) not being able to distinguish chairs from each other; (5 pts.)*

(b) there can be rooms without chairs
- *(b.1) being able to distinguish chairs from each other, (5 pts.)*
- *(b.2) not being able to distinguish chairs from each other. (5 pts.)*

6 (20 puntos / 20 points).-

Un restaurante tiene una oferta de 7 menús, ofreciendo cada día uno de ellos como menú del día.

a) Un menú semanal variado es una colección de 7 menús diarios todos diferentes.
- *a.1) ¿Cuántas distribuciones de menús semanales variados son posibles? (6,66 pts.)*
- *a.2) ¿Y si la oferta del restaurante fuese de 8 menús en vez de 7? (6,66 pts.)*

b) Un día festivo determinado, el restaurante ofrece no solo uno sino los 7 menús como menús del día. ¿De cuántas formas puede pedir comida un grupo de cuatro personas si cada una quiere menú? (6,66 pts.)

A restaurant has an offer of 7 menus, offering each day one of them as the set daily menu.

(a) A varied weekly menu is a collection of 7 different set daily menus.
- *(a.1) How many varied weekly menu distributions are possible? (6,66 pts.)*
- *(a.2) What if the restaurant offered 8 instead of 7 menus? (6,66 pts.)*

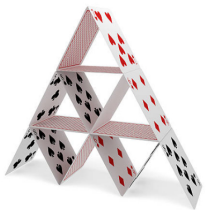
(b) On a certain holiday, the restaurant offers not only one but the 7 menus as set daily menus. How many ways can a group of four people order food if each one wants a menu? (6,66 pts.)

PARA LAS DOS CUESTIONES SIGUIENTES, se exige modelizar detalladamente, determinando una fórmula explícita, las situaciones descritas mediante ecuaciones en diferencias (relaciones de recurrencia) y resolverlas según la teoría correspondiente.

FOR THE FOLLOWING TWO QUESTIONS, it is required to model in detail, establishing an explicit formula, the situations described by means of difference equations (recurrence relations) and solve them according to the corresponding theory.

7 (20 puntos / 20 points).-

¿Cuántas cartas son necesarias para formar un castillo de naipes de n pisos? En la figura, puede apreciarse que hicieron falta 15 para formar un castillo de naipes de 3 pisos.



How many cards do we need to build a house of cards of n floors? In the figure, it can be seen that 15 cards were required to build one house of cards of 3 floors.

8 (20 puntos / 20 points).-

Considérese el arenero de un experimento web con una población de bots autorreplicantes malignos. Supóngase que no existen factores externos que modifique su crecimiento. Supóngase que la población crece el doble, en cada período de tiempo que transcurre entre dos medidas, de lo que creció en el período inmediatamente anterior. Calcular el número de bots en un instante arbitrario de tiempo t.

Consider a sandbox of a web experiment with a population of malignant self-replicating bots. Let us assume that there are no external factors that modify population growth. Suppose that during each period of time between measurements, the population grew twice as much as it grew during the period just gone by. Calculate the number of bots at an arbitrary point in time t.

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO: [9] Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, compruebe también que sus respuestas tienen sentido. [10] Este es el final del examen. Por favor, cuando se marche, llévese esta hoja, si quiere. [•] Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

PLEASE READ LAST: [9] When you have finished answering the questions, you may want to look over them to make sure you have not forgotten any of them and also over your answers to make sure you have not omitted anything you wanted to say. Please check also that your answers make sense. [10] This is the end of the exam. Please take this sheet with you as you leave, if you wish. [•] Thank you very much for your time, consideration and flexibility.

Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS/ FURTHER MATHEMATICS

Primer examen preparatorio / Mid course preparatory exam

Tiempo máximo: **2 h. y 30 m.** / Maximum time: **2 h. and 30 m.**

Máxima puntuación: **100 pts.** / Top grade: **100 pts.**

Profesor / Professor:
Juan Miguel León-Rojas

POR FAVOR, PRIMERO LEA ESTO: **[0]** Escriba su nombre y número de DNI en *cada página*. **[1]** Esta actividad debe hacerse sin ayuda: *usted no puede tener* libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes ...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de usted; todos ellos deben ser guardados lejos y apagados si es el caso; si se observa que usted está usando material documental o un dispositivo de almacenamiento o comunicación, deberá abandonar la actividad y obtendrá una puntuación de cero. **[2]** Informe al profesorado encargado y excúsese por adelantado si necesita salir durante la actividad; de otro modo, deberá permanecer en la sala hasta que usted la termine. **[3]** Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero (el orden de las respuestas no importa). **[4]** No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, una respuesta incorrecta podrá obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentos sean claros y lógicamente sólidos. **[5]** Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización cuentan. **[6]** Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su participación en esta actividad no será calificada. **[7]** Si entrega sus hojas de respuestas, *es recomendable* que también entregue los borradores de las soluciones (eso sí, razonablemente organizados), ¿por qué?, porque ayuda a saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento, en la evaluación de sus competencias. **[8]** Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Si tiene nervios, cierre sus ojos y respire profunda y prolongadamente cuatro veces seguidas (inhalar y exhalar cuenta como una vez); le ayudará a relajarse y concentrarse. **[•]** Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PLEASE READ FIRST: **[0]** Write your name and national ID number on *each page*. **[1]** This is a closed-book activity: you *are not allowed* to have books, notes, e-books, calculators, cell phones, PDAs, tablets, phablets, pagers, .mp3/4/.../n players, smart devices (pens, phones, watches ...) or any other communicating/storage devices on or near your person during the activity; all of them must be put away and turned off if it is the case; if you are observed using any documentary or communication/storage device you will be asked to drop the activity and you will have a credit score of zero. **[2]** Inform the teaching staff in charge and present excuse in advance if you must leave while doing the activity; otherwise you are to be here until you finish doing it. **[3]** As you go over the questions, look for the easy ones and do them first (the order of the answers does not matter). **[4]** Do not simplify your answers, write legibly and explain your work, *showing all intermediate steps*; if your work is absent, illegible or your answer is given without justification, then no partial credit can be awarded; however, an incorrect answer may get partial credit as long as your arguments are clear and logically sound. **[5]** Please label, or define, any variables and notation you choose to work with; also explain how you are solving each question as you go along, for example, *stating clearly any theorem or result you use*; neatness, cleanliness and organization count. **[6]** You are free to hand in your answer papers; if you do not hand in them, your participation on this activity will not be scored. **[7]** If you hand in your answer papers, *it is advisable* that you hand in also your rough work on scratch paper (although it must be reasonably arranged), why?, because it helps to know more about your knowledge and learning potential, in assessing your competences. **[8]** You have previously solved similar questions. If you are nervous, close your eyes and breath long and deeply four times in a row (inhaling and exhaling count as one time); it will help you relax and focus during this activity. **[•]** I am hoping your efforts bear fruit. Do well!

Tema 1: (15 h GG y 5 h S/L $\Rightarrow$ 62,5 por ciento $\Rightarrow_{\text{aprox.}}$ 3 cuestiones [60 puntos de 100]).

Theme 1: (15 h GG and 5 h S/L $\Rightarrow$ 62.5 per cent $\Rightarrow_{\text{approx.}}$ 3 questions [60 points out of 100]).

1 (20 puntos / 20 points).-

«De tres jugadores, A, B y C, se sabe solo que "C miente siempre que miente A" o que "la mentira de B siempre es seguida de la mentira de C". Por tanto, se deduce que "si A o B mienten, entonces C miente"». Haga lo siguiente:

a) *Formalice dicho argumento en lógica proposicional. Llámelo $\mathcal{A}$. (2 pts.)*

b) *Demuestre, mediante el método de las tablas semánticas, si $\mathcal{A}$ es o no es un argumento válido. (12 pts.)*

c) *Caso de que $\mathcal{A}$ sea válido, modifique la hipótesis o la tesis para que el argumento modificado no sea válido y justifique que así es. Caso de que $\mathcal{A}$ no sea válido, identifique el/los modelo/s que proporciona/n la/s rama/s abierta/s y el conjunto de fórmulas bien formadas para el que lo/s proporciona/n. (2 pts.)*

d) *Caso de que existan modelos, utilice algún método, estrategia o herramienta de la Lógica Proposicional para demostrar que lo son. (2 pts.)*

e) *Caso de que existan modelos, exprese en español los contraargumentos —proporcionados por tales modelos— que permiten refutar el argumento $\mathcal{A}$. (2 pts.)*

'Given three gamblers, A, B and C, it is only known that "C lies whenever A lies" or that "the lie of B is always followed by the lie of C". Hence, it is deduced that "if A or B lie, then C lies".' Do the following:

(a) *Formalise this argument in propositional logic. Name it $\mathcal{A}$. (2 pts.)*

(b) *Using semantic tableaux, prove if $\mathcal{A}$ is a valid argument or not. (12 pts.)*

(c) *In the event $\mathcal{A}$ is valid, modify the hypothesis or the conclusion to ensure that the modified argument is not valid and the reason for this. In the event $\mathcal{A}$ is not valid, identify the model(s) which are provided by the open branch(es) and the set of well-formed formulas for which it(they) is(are) provided for. (2 pts.)*

(d) *In the event any model does exist, use some of the propositional logic own methods, strategies or tools to prove that it is the case. (2 pts.)*

(e) *In the event any model does exist, express in English the counterarguments — which are provided by those models — permitting rebuttal of the argument $\mathcal{A}$. (2 pts.)*

2 (20 puntos / 20 points).-

a) *¿Es necesariamente transitiva la unión de dos relaciones transitivas? (10 pts.)*

b) *Sea C un conjunto y R una relación binaria definida en C. Considere las propiedades: B_1: «$(\forall a \in C)(\exists x \in C)(xRa)$» y B_2: «$(\forall a, b, c \in C)(aRb \wedge aRc \to bRc)$». Demuestre que:*

b.1) si R es una relación de equivalencia en C, entonces satisface las propiedades B_1 y B_2. (5 pts.);

b.2) recíprocamente, toda relación que satisfaga las propiedades B_1 y B_2 es de equivalencia en C. (5 pts.)

(a) *Is the union of two transitive relations necessarily transitive? (10 pts.)*

(b) *Let C be a set and R a binary relation defined on C. Consider the properties, B_1: '$(\forall a \in C)(\exists x \in C)(xRa)$' and B_2: '$(\forall a, b, c \in C)(aRb \wedge aRc \to bRc)$.' Prove that,*

(b.1) if R is an equivalence relation on C, then it satisfies properties B_1 and B_2. (5 pts.);

(b.2) conversely, any relation satisfying properties B_1 and B_2 is an equivalence relation on C. (5 pts.)

3 (20 puntos / 20 points).-

En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, considere la ley de composición binaria: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x * y = x + y - x \cdot y$, siendo $+$, $-$ y $\cdot$ la suma, la diferencia y el producto habituales en $\mathbb{Q}$.

a) *Estudie la estructura algebraica $(\mathbb{Q}; *)$. (15 pts.)*

b) *Encuentre un subconjunto propio A de Q tal que $(A; *)$ sea grupo abeliano y construya su tabla de Cayley. (5 pts.)*

Let the binary composition law on the set $\mathbb{Q}$ of rational numbers be defined by: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x * y = x + y - x \cdot y$, where $+$, $-$ and $\cdot$ are the usual addition, substraction and product in $\mathbb{Q}$.

(a) *Study the algebraic structure $(\mathbb{Q}; *)$. (15 pts.)*

(b) *Find a proper subset A of Q such that $(A; *)$ is an Abelian group and produce its Cayley table. (5 pts.)*

Tema 2: (9 h GG y 3 h S/L $\Rightarrow$ 37,5 por ciento $\Rightarrow_{\text{approx.}}$ 2 cuestiones [40 puntos de 100]).

4 (20 puntos / 20 points).-

a) Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ impar } \Rightarrow 16|(n^4-1))$. *(10 pts.)*

b) Calcule el resto de dividir $3^{2n+2}+2^{6n+1}-7$ *entre* 11*, para cualquier* $n \in \mathbb{N}$. *(10 pts.)*

5 (20 puntos / 20 points).-

Considerando un número suficiente de monedas de 5*,* 10 *y* 20 *céntimos, ¿de cuántas formas pueden* 14 *de tales monedas sumar* 2 *euros y cuáles son dichas formas? Resuelva esta cuestión utilizando la teoría de las ecuaciones diofánticas.*

Theme 2: (9 h GG y 3 h S/L $\Rightarrow$ 37,5 per cent $\Rightarrow_{\text{approx.}}$ 2 questions [40 points out of 100]).

(a) Prove that $(\forall n \in \mathbb{N})(n \text{ odd } \Rightarrow 16|(n^4-1))$. *(10 pts.)*

(b) Calculate the remainder of $3^{2n+2}+2^{6n+1}-7$ *(for any* $n \in \mathbb{N}$*), when it is divided by* 11. *(10 pts.)*

Considering a sufficient number of 5*-,* 10*- and* 20*-cent coins, in how many ways* 14 *such coins can be* 2 *euros in total and what are such ways? Solve this question using the theory of diophantine equations.*

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO: **[9]** Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, compruebe también que sus respuestas tienen sentido. **[10]** Este es el final de la actividad. Por favor, cuando se marche, llévese esta hoja, si quiere. **[•]** Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

PLEASE READ LAST: **[9]** When you have finished answering the questions, you may want to look over them to make sure you have not forgotten any of them and also over your answers to make sure you have not omitted anything you wanted to say. Please check also that your answers make sense. **[10]** This is the end of the activity. Please take this sheet with you as you leave, if you wish. **[•]** Thank you very much for your time, consideration and flexibility.

Departamento de Matemáticas
Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS/ FURTHER MATHEMATICS
Actividad intermedia de cualificación (10 de abril de 2019) Midterm qualifying activity (10 April 2019)
Tiempo máximo: 2 h y 30 m / Maximum time: 2 h and 30 m
Máxima puntuación: 100 ptos. (+ 20 ptos. extra) / Top grade: 100 pt (+ 20 extra pt)

Profesor / Professor:
Juan Miguel León Rojas

POR FAVOR, PRIMERO LEA ESTO: [0] Escriba su nombre y número de DNI en *cada página*. [1] Este examen debe hacerse sin ayuda: *usted no puede tener* libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes ...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de usted; todos ellos deben ser guardados lejos y apagados si es el caso; si se encuentra cualquiera de ellos cerca de usted o se observa que usted está usando material documental o un dispositivo de almacenamiento o comunicación, deberá abandonar el examen y obtendrá una puntuación de cero. [2] Informe al profesorado encargado y excúsese por adelantado si necesita salir durante el examen; de otro modo, deberá permanecer en la sala hasta que usted la termine. [3] Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero (el orden de las respuestas no importa). [4] No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, por una respuesta incorrecta sí podría obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentaciones o inferencias sean pertinentes, claras y lógicamente válidas. [5] Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización cuentan. [6] Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su participación en este examen no será calificada. [7] Si entrega sus hojas de respuestas, *es recomendable* que también entregue los borradores de las soluciones (eso sí, razonablemente organizados), ¿por qué?, porque ayuda a saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento, en la evaluación de sus competencias. [8] Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Si tiene nervios, cierre sus ojos y respire profunda y prolongadamente cuatro veces seguidas (inhalar y exhalar cuenta como una vez); le ayudará a relajarse y concentrarse. [•] Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PLEASE READ FIRST: [0] Write your name and national ID number on *each page*. [1] This is a closed-book exam: you *are not allowed* to have books, notes, e-books, calculators, cell phones, PDAs, tablets, phablets, pagers, .mp3/4/.../n players, smart devices (pens, phones, watches ...) or any other communicating/storage devices on or near your person during the exam; all of them must be put away and turned off if it is the case; if any of them is found near you or you are observed using any documentary or communication/storage device you will be asked to drop the exam and you will have a credit score of zero. [2] Inform the teaching staff in charge and present excuse in advance if you must leave while doing the exam; otherwise you are to be here until you finish doing it. [3] As you go over the questions, look for the easy ones and do them first (the order of the answers does not matter). [4] Do not simplify your answers, write legibly and explain your work, *showing all intermediate steps*; if your work is absent, illegible or your answer is given without justification, then no partial credit can be awarded; however, an incorrect answer may get partial credit as long as your argumentations or inferences are relevant, clear and logically valid. [5] Please label, or define, any variables and notation you choose to work with; also explain how you are solving each question as you go along, for example, *stating clearly any theorem or result you use*; neatness, cleanliness and organization count. [6] You are free to hand in your answer papers; if you do not hand in them, your participation on this exam will not be scored. [7] If you hand in your answer papers, *it is advisable* that you hand in also your rough work on scratch paper (although it must be reasonably arranged), why?, because it helps to know more about your knowledge and learning potential, in assessing your competences. [8] You have previously solved similar questions. If you are nervous, close your eyes and breath long and deeply four times in a row (inhaling and exhaling count as one time); it will help you relax and focus during this exam. [•] I am hoping your efforts bear fruit. Do well!

TEMA 1: (15 h GG y 5 h S/L ⇒ 62,5 por ciento $\Rightarrow_{\text{aprox.}}$ 3 cuestiones [60 puntos de 100]). ¡Más 12 puntos extra!

THEME 1: (15 h GG and 5 h S/L ⇒ 62.5 per cent $\Rightarrow_{\text{approx.}}$ 3 questions [60 points out of 100]). Plus 12 extra points!

1 (20 puntos / 20 points).-

Considere el argumento: «No lo haré si tú no lo haces también. Pero tú no lo harás, a menos que yo lo apruebe. Por tanto, lo haremos si yo lo apruebo». Haga lo siguiente:

a) ▶ Formalice dicho argumento en lógica proposicional. Llámelo $\mathcal{A}$. (2 ptos.)
b) ▶ Use tablas semánticas para demostrar si $\mathcal{A}$ es o no es un argumento válido. (12 ptos.)
c) Caso de que $\mathcal{A}$ sea válido, ▶ modifique la/s hipótesis o la tesis para que el argumento modificado no sea válido y ▶ justifique que así es. Caso de que $\mathcal{A}$ no sea válido, ▶ identifique • el/los modelo/s que proporciona/n la/s rama/s abierta/s y • el conjunto de fórmulas bien formadas para el que lo/s proporciona/n. (2 ptos.)
d) Caso de que existan modelos, ▶ utilice algún método, estrategia o herramienta de la Lógica Proposicional para demostrar que lo son. (2 ptos.)
e) Caso de que existan modelos, ▶ exprese en español los contraargumentos —proporcionados por tales modelos— que permiten refutar el argumento $\mathcal{A}$. (2 ptos.)

Consider the argument: 'I shall not do it if you do not do it too. But you will not do it unless I approve it. Therefore, we will do it if I approve it.' Do the following:

(a) ▶ Formalise this argument in propositional logic. Name it $\mathcal{A}$. (2 pt)
(b) ▶ Use semantic tableaux to prove whether $\mathcal{A}$ is a valid argument or not. (12 pt)
(c) In the event $\mathcal{A}$ is valid, ▶ modify the hypothesis(es) or the thesis to ensure that the modified argument is not valid and ▶ indicate a reason for this. In the event $\mathcal{A}$ is not valid, ▶ identify • the model(s) which are provided by the open branch(es) and • the set of well-formed formulas for which it(they) is(are) provided for. (2 pt)
(d) In the event any model does exist, ▶ use some of the propositional logic own methods, strategies or tools to prove that it is the case. (2 pt)
(e) In the event any model does exist, ▶ express in English the counterarguments — which are provided by those models — permitting rebuttal of the argument $\mathcal{A}$. (2 pt)

2 (20 puntos / 20 points).-

a) Sea C un conjunto y $f : 2^C \to \mathbb{Z}$ una aplicación que satisface que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$. ▶ Demuestre que $f(\emptyset) = 0$. (5 ptos.)
b) Dadas dos cadenas finitas a y b de la misma longitud, la distancia de Hamming entre ellas, $d_H(a, b)$ es el número de posiciones en las que los símbolos correspondientes son diferentes. Sea C un conjunto de cadenas. Sea R la relación binaria definida en C por: $aRb \Leftrightarrow d_H(a, b) \leqslant 3$.
   b.1) ▶ Estudie si R satisface las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva o conexa (fuertemente completa) (1,75 ptos. c/u) y ▶ diga • qué tipo de relación es y • por qué (1,25 ptos.);
   b.2) ▶ Proporcione un ejemplo de conjunto C y considerando R actuando en él, ▶ muestre cuáles son las clases de equivalencia, las clases de tolerancia o dibuje un diagrama de Hasse, dependiendo de que R sea una relación de equivalencia, una relación de tolerancia o una ordenación en C. (5 ptos.)

(a) Let C be a set and $f : 2^C \to \mathbb{Z}$ a total function satisfying that if $A \cap B = \emptyset$ then $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$. ▶ Prove that $f(\emptyset) = 0$. (5 pt)
(b) Given two finite strings a and b of equal length, the Hamming distance between them, $d_H(a, b)$ is the number of positions at which the corresponding symbols are different. Let C be a set of strings. Let R be the binary relation defined on C by: $aRb \Leftrightarrow d_H(a, b) \leqslant 3$.
   (b.1) ▶ Study whether R is reflexive, symmetric, antisymmetric, transitive or connex (strongly complete) (1.75 pt ea) and ▶ say • what sort of relation is and • why it is so (1.25 pt);
   (b.2) ▶ Give an example of set C and consider R on C. ▶ Show what are the equivalence classes, the tolerance classes or draw a Hasse diagram, depending on whether R on C is an equivalence relation, a tolerance relation or an ordering. (5 pt)

Dele la vuelta a la hoja. ↬ ***Turn the sheet over.*** ↬

3 **(20 puntos / 20 points).-**

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros y sea k un entero. Sea la ley de composición binaria en $\mathbb{Z}$ definida por: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x *_k y = x + y + k$, donde $+$ es la suma habitual en $\mathbb{Z}$. ▶ ¿Es $(\mathbb{Z}; *_k)$ un grupo abeliano sea cual sea el entero k?
⚠ Demuestre lo que afirme.

Let $\mathbb{Z}$ denote the set of integers and let k be an integer. Let $*_k$ be the binary composition law on $\mathbb{Z}$ defined by: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x *_k y = x + y + k$, where $+$ is the usual addition in $\mathbb{Z}$. ▶ Is $(\mathbb{Z}; *_k)$ an Abelian group no matter what integer k is?
⚠ Prove what you claim.

4 **(12 PUNTOS EXTRA / 12 EXTRA POINTS).-**

(Merece la pena intentar esta cuestión, podría ayudarle a mejorar su calificación).

a) Respecto de la cuestión n.º 1, ▶ use tablas de verdad como estrategia de refutación para comprobar que los resultados obtenidos en los apartados • b) y • c) son correctos. (6 ptos.)
b) Respecto de la cuestión n.º 2, apartado a), ▶ demuestre que $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$. (6 ptos.)

(This question is worth a try, it might help you boost your grade).

(a) Regarding question no. 1, ▶ use truth tables as a refutation strategy to check that the results obtained from parts • (b) and • (c) are correct. (6 pt)
(b) Regarding question no. 2, part (a), ▶ prove that $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$. (6 pt)

TEMA 2: **(9 h GG y 3 h S/L ⇒ 37,5 por ciento ⇒$_{\text{approx.}}$ 2 cuestiones [40 puntos de 100]). ¡Más 8 puntos extra!**

THEME 2: **(9 h GG y 3 h S/L ⇒ 37,5 per cent ⇒$_{\text{approx.}}$ 2 questions [40 points out of 100]). Plus 8 extra points!**

5 **(20 puntos / 20 points).-**

⚠ Se exige que usted resuelva los dos apartados de esta cuestión utilizando el algoritmo de la división o la teoría de congruencias.

a) Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ y sabiendo que $a|b$ y que el resto de dividir c entre a es r y que el resto de dividir c entre b es s, ▶ calcule el resto de dividir s entre a. (10 ptos.)
b) ▶ Demuestre que $7^n(3n-7)+7$ es divisible por 3 para cualquier entero no negativo n. (10 ptos.)

⚠ You are required to use the division algorithm or the theory of congruences to solve both parts of this question.

(a) Let $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ and suppose that $a|b$ and that c leaves a remainder of r when divided by a and a remainder of s when divided by b. ▶ What remainder does s leave when divided by a? (10 pt)
(b) ▶ Prove that $7^n(3n-7)+7$ is divisible by 3 for every non-negative integer n. (10 pt)

6 **(20 puntos / 20 points).-**

Queremos empaquetar 64 objetos para su transporte. Disponemos de 5 cajas con capacidad para 8 objetos cada una y otras 5 con capacidad doble, esto es, para 16 objetos cada una. Si no tenemos que utilizar todas las cajas sino maximizar el número de objetos por caja, ¿▶ de cuántas formas podemos hacer el empaquetado final y ▶ cuáles son dichas formas?
⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted use la teoría de las ecuaciones diofánticas para, razonadamente: a) • proponer una ecuación diofántica y utilizando un máximo común divisor demostrar que tiene al menos una solución entera; • calcular: b) · una solución particular de ella; c) · su solución general; d) · la solución de la situación en estudio. (5 ptos. c/u)

We want to pack 64 objects for transport. We have access to 5 boxes holding 8 objects each one and other 5 providing twice the capacity, that is, holding 16 objects per box. If we do not have to use all the boxes but maximise the number of objects per box, ▶ in how many ways can we make the final packaging and ▶ what are such ways?
⚠ In order to solve this question, you are required to use the theory of Diophantine equations to reasonably: (a) • provide a Diophantine equation and use a greatest common divisor to prove that this equation has at least one integer solution; • calculate: (b) · a particular solution to it; (c) · its general solution; (d) · the solution to the situation under study. (5 pt ea)

7 **(8 PUNTOS EXTRA / 8 EXTRA POINTS).-**

(Merece la pena intentar esta cuestión, podría ayudarle a mejorar su calificación).

Suponga que el número de divisores positivos de $n \in \mathbb{Z}^+$ es 24 y que el máximo común divisor de todos los números que son posibles valores de n es 30. ▶ Halle todos estos números que son posibles valores de n.
⚠ Se exige que usted resuelva esta cuestión utilizando teoría de números.

(This question is worth a try, it might help you boost your grade).

Suppose that the number of positive divisors of $n \in \mathbb{Z}^+$ is 24 and that the greatest common divisor of all the numbers which are possible values of n is 30. ▶ Find all these numbers which are possible values of n.
⚠ You are required to use number theory to solve this question.

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO: [9] Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, compruebe también que sus respuestas tienen sentido. [10] Este es el final de la actividad. Por favor, cuando se marche, llévese esta hoja, si quiere. [•] Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

PLEASE READ LAST: [9] When you have finished answering the questions, you may want to look over them to make sure you have not forgotten any of them and also over your answers to make sure you have not omitted anything you wanted to say. Please check also that your answers make sense. [10] This is the end of the activity. Please take this sheet with you as you leave, if you wish. [•] Thank you very much for your time, consideration and flexibility.

Departamento de Matemáticas
Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS/ FURTHER MATHEMATICS
Examen preparatorio final / End course preparatory exam
Tiempo máximo: **2 h. y 30 m.** / Maximum time: **2 h. and 30 m.**
Máxima puntuación: **100 ptos. + 20 ptos. extra** / Top grade: **100 pt + 20 extra pt**

Profesor / Professor: Juan Miguel León-Rojas

POR FAVOR, PRIMERO LEA ESTO: **[0]** Escriba su nombre y número de DNI en *cada página*. **[1]** Este examen debe hacerse sin ayuda: *usted no puede tener* libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes ...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de usted; todos ellos deben ser guardados lejos y apagados si es el caso; si se observa que usted está usando material documental o un dispositivo de almacenamiento o comunicación, deberá abandonar el examen y obtendrá una puntuación de cero. **[2]** Informe al profesorado encargado y excúsese por adelantado si necesita salir durante el examen; de otro modo, deberá permanecer en la sala hasta que usted la termine. **[3]** Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero (el orden de las respuestas no importa). **[4]** No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, una respuesta incorrecta podrá obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentos sean claros y lógicamente sólidos. **[5]** Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización cuentan. **[6]** Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su participación en este examen no será calificada. **[7]** Si entrega sus hojas de respuestas, *es recomendable* que también entregue los borradores de las soluciones (eso sí, razonablemente organizados), ¿por qué?, porque ayuda a saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento, en la evaluación de sus competencias. **[8]** Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Si tiene nervios, cierre sus ojos y respire profunda y prolongadamente cuatro veces seguidas (inhalar y exhalar cuenta como una vez); le ayudará a relajarse y concentrarse. **[•]** Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PLEASE READ FIRST: **[0]** Write your name and national ID number on *each page*. **[1]** This is a closed-book exam: you *are not allowed* to have books, notes, e-books, calculators, cell phones, PDAs, tablets, phablets, pagers, .mp3/4/.../n players, smart devices (pens, phones, watches ...) or any other communicating/storage devices on or near your person during the exam; all of them must be put away and turned off if it is the case; if you are observed using any documentary or communication/storage device you will be asked to drop the exam and you will have a credit score of zero. **[2]** Inform the teaching staff in charge and present excuse in advance if you must leave while doing the exam; otherwise you are to be here until you finish doing it. **[3]** As you go over the questions, look for the easy ones and do them first (the order of the answers does not matter). **[4]** Do not simplify your answers, write legibly and explain your work, *showing all intermediate steps*; if your work is absent, illegible or your answer is given without justification, then no partial credit can be awarded; however, an incorrect answer may get partial credit as long as your arguments are clear and logically sound. **[5]** Please label, or define, any variables and notation you choose to work with; also explain how you are solving each question as you go along, for example, *stating clearly any theorem or result you use*; neatness, cleanliness and organization count. **[6]** You are free to hand in your answer papers; if you do not hand in them, your participation on this exam will not be scored. **[7]** If you hand in your answer papers, *it is advisable* that you hand in also your rough work on scratch paper (although it must be reasonably arranged), why?, because it helps to know more about your knowledge and learning potential, in assessing your competences. **[8]** You have previously solved similar questions. If you are nervous, close your eyes and breath long and deeply four times in a row (inhaling and exhaling count as one time); it will help you relax and focus during this exam. **[•]** I am hoping your efforts bear fruit. Do well!

PARTE 1: (24 h GG y 8 h S/L ⇒ 61,6 por ciento ⇒aprox. 3 cuestiones [60 puntos de 100]). ¡Más 12 puntos extra!

PART 1: (24 h GG y 8 h S/L ⇒ 61.6 per cent ⇒approx. 3 questions [60 points out of 100]). Plus 12 extra points!

1 (20 puntos / 20 points).-

Considere el argumento: «Utilizaremos ambas componentes software solo si a igual número de peticiones su capacidad de respuesta es la misma. Cuidado, insistimos, que el número de peticiones sea el mismo, no solo que respondan por igual. Pero entonces, de todo lo anterior, se deduce que no es cierto que se vayan a utilizar ambas componentes». Haga lo siguiente:

a) ▶ Formalice dicho argumento en lógica proposicional. Llámelo $\mathcal{A}$. (2 ptos.)

b) ▶ Demuestre si $\mathcal{A}$ es o no es un argumento válido, usando:
   b.1) • reglas de inferencia o tablas semánticas —usted decide qué usa (12 ptos.);
   b.2) • tablas de verdad como método de refutación o reducción al absurdo o formas normales —de nuevo, usted decide (6 ptos.)

Consider the argument: 'We shall use both software components only if at equal number of petitions they provide the same response capacity. Beware, we emphasise that the number of petitions need to be the same, not only that they respond equally. But then, it follows from the above that it is not true that both components will be used.' Do the following:

(a) ▶ Formalise this argument in propositional logic. Name it $\mathcal{A}$. (2 pt)

(b) ▶ Prove whether $\mathcal{A}$ is a valid argument or not, using:
   (b.1) • rules of inference or semantic tableaux —the decision is yours (12 pt);
   (b.2) • truth tables as a rebuttal method or reductio ad absurdum or normal forms —again, the decision is yours. (6 pt)

2 (20 puntos / 20 points).-

a) Sea $(C;+)$ un semigrupo abeliano. Sea R la relación binaria definida en C por: $\forall x, y \in C$, $xRy \Leftrightarrow x + y = y$.

a.1) ► Estudie si R satisface o no las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva y conexa (1,75 ptos. c/u) y ► diga • qué tipo de relación es y • por qué (1,25 ptos.);

a.2) ► Proporcione un ejemplo de conjunto C y considerando R actuando en él, ► muestre cuáles son las clases de equivalencia, las clases de tolerancia (vecindades) o dibuje un diagrama de Hasse, dependiendo de que R sea una relación de equivalencia, una relación de tolerancia o una relación de orden en C. (5 ptos.)

b) Sea C un conjunto y $*$ una operación en C. Suponga que existe elemento neutro para $*$ en C y que, cualesquiera $x, y, z \in C$ satisfacen $x*(y*z) = (x*z)*y$. ► Demuestre que $(C;*)$ es una estructura abeliana. (5 ptos.)

(a) Let $(C;+)$ be an Abelian semigroup. Let R be the binary relation on C defined by: $\forall x, y \in C$, $xRy \Leftrightarrow x + y = y$.

(a.1) ► Study whether or not R is reflexive, symmetric, antisymmetric, transitive and/or connex (1.75 pt ea) and ► say • what sort of relation is and • why it is so (1.25 pt);

(a.2) ► Give an example of set C and consider R acting on C. ► Show what are the equivalence classes, the tolerance classes (neighbourhoods) or draw a Hasse diagram, depending on whether R on C is an equivalence relation, a tolerance relation or an order relation. (5 pt)

(b) Let C and $*$ be a set and an operation on C, respectively. Suppose that there is an identity element for $*$ in C and that, every $x, y, z \in C$ satisfy $x*(y*z) = (x*z)*y$. ► Prove that $(C;*)$ is an Abelian structure. (5 pt)

3 (20 puntos / 20 points).-

Imagine que usted tiene que realizar un pago de 38 euros a una persona, pero en vez de euros usted solo tiene eslagnas (1 eslagna = 8 euros) y la otra persona solo tiene dobeles (1 dobel = 2 euros). ► Calcule • las eslagnas que usted debe entregar para realizar el pago y • los dobeles que deben devolverle, siendo el número de eslagnas el menor posible.

⚠ Resuelva esta cuestión utilizando la teoría de las ecuaciones diofánticas.

Imagine that you have to make a payment of 38 euros to a person but the currency available to you is the slagna (1 slagna = 8 euros) while the currency available to the another person is the dobbel (1 dobbel = 2 euros). ► Find out • how many slagnas you need to make the payment and • how many dobbels you will be given in return under the condition that the number of slagnas is the lowest as possible.

⚠ Solve this question using the theory of Diophantine equations.

4 (12 PUNTOS EXTRA / 12 EXTRA POINTS).-

(Merece la pena intentar esta cuestión, podría ayudarle a mejorar su calificación).

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, finitos o no, tales que $|A \setminus B| = |B \setminus A|$. ► Demuestre que este hecho implica que $|A| = |B|$.

⚠ Nota: $A \setminus B$ significa «A menos B».

(This question is worth a try, it might help you boost your grade).

Let A and B be two arbitrary sets, finite or not, such that $|A \setminus B| = |B \setminus A|$. ► Prove that this fact implies that $|A| = |B|$.

⚠ Note: $A \setminus B$ means 'A minus B.'

PARTE 2: (15 h GG y 5 h S/L ⇒ 38,4 por ciento ⇒approx. 2 cuestiones [40 puntos de 100]). ¡Más 8 puntos extra!

PART 2: (15 h GG and 5 h S/L ⇒ 38.4 per cent ⇒approx. 2 questions [40 points out of 100]). Plus 8 extra points!

5 (20 puntos / 20 points).-

Se dispone de diez ejemplares del *Quijote*, todos de la misma tirada. Imagine una librería de cuatro estantes, digamos *a*, *b*, *c* y *d* y suponga que todos los libros caben en cualquiera de los estantes y que por tanto puede haber estantes vacíos. ► ¿De cuántas formas pueden colocarse los diez ejemplares en los estantes de la librería, suponiendo que:

a) • tal colocación no está sujeta a restricciones? ($\frac{20}{3}$ ptos.)

b) • en todos los estantes tiene que haber al menos un ejemplar? ($\frac{20}{3}$ ptos.)

c) • en el estante *b* debe haber al menos tres ejemplares y en el estante *d* exactamente dos? ($\frac{20}{3}$ ptos.)

⚠ Resuelva las cuestiones correspondientes a cada apartado, modelizando detalladamente las situaciones descritas como problemas de distribución/ocupación y resuélvalas aplicando teoría combinatoria. No use ecuaciones en diferencias.

Ten copies of *Don Quixote* are available, all from the same print run. Imagine a bookcase with four shelves, say *a*, *b*, *c* and *d* and suppose that any shelf can hold all the books and so that some shelves may be empty. ► In how many ways may we place the ten books onto the shelves of the bookcase, assuming that:

(a) • such placement is subject to no restrictions? ($\frac{20}{3}$ pt)

(b) • we wish to place the books so that each shelf gets at least one book? ($\frac{20}{3}$ pt)

(c) • we wish to place the books so that shelf *b* gets at least three books and shelf *d* gets exactly two books? ($\frac{20}{3}$ pt)

⚠ Solve all three of the parts of this question by modelling in detail the situations described in each one of them as distribution/occupancy problems and solve them by applying combinatorics theory. Do not use difference equations.

6 (20 puntos / 20 points).-

En una simulación computacional predictiva se estudia una población de entes futuros restringida a un área en la que se supone que salvo se diga algo en contra, no existen factores externos que afecten a su crecimiento. Suponga que en dicha área, en cada período de tiempo que transcurre entre dos medidas: a) la población crece el doble de lo que creció en el período inmediatamente anterior, b) abandonan la población tantos entes como un cuarto de la población inicial del período inmediatamente anterior, y c) se incorporan a la población 4 entes del exterior. Suponga asimismo una población inicial de 3 entes y que el primer año se llega a 7 entes. ► Calcule el número de entes en un instante arbitrario de tiempo *t*.
⚠ Resuelva esta cuestión modelizando detalladamente la situación descrita en el ámbito de la teoría de ecuaciones en diferencias y encuentre una fórmula explícita como respuesta.

In a computing predictive simulation a population of future entities within a restricted area is under study. Except where otherwise noticed it is assumed that there are no external factors that modify population growth. Supposed that in this area, during each period of time between measurements: (a) the population grow twice as much as it grew during the period just gone by, (b) the number of those who leave is as much as a quarter of the population in the previous year, and (c) 4 entities coming from abroad join the population. Also assume that there were 3 entities at the outset and that population reaches as many as 7 entities one year after. ► Calculate the number of entities at an arbitrary point in time *t*.
⚠ Solve this question by modelling in detail the situation described within the ambit of difference equation theory, and find out an explicit formula as the solution.

7 (8 PUNTOS EXTRA / 8 EXTRA POINTS).-

(Merece la pena intentar esta cuestión, podría ayudarle a mejorar su calificación).
► ¿Cuál es el valor máximo posible del número de filas *n* de una matriz binaria *M* de orden $n \times 10$, sabiendo que *M* no tiene dos filas iguales?
⚠ Resuelva esta cuestión modelizando detalladamente la situación descrita como un problema de distribución/ocupación y resuélvala aplicando teoría combinatoria. No use ecuaciones en diferencias.

(This question is worth a try, it might help you boost your grade).
► What is the highest possible value of *n*, the number of rows of a $n \times 10$ binary matrix *M*, knowing that *M* has not two equal rows?
⚠ Solve this question by modelling in detail the situation described as a distribution/occupancy problem and solve it by applying combinatorics theory. Do not use difference equations.

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO: **[9]** Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, compruebe también que sus respuestas tienen sentido. **[10]** Este es el final del examen. Por favor, cuando se marche, llévese esta hoja, si quiere. **[•]** Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

PLEASE READ LAST: **[9]** When you have finished answering the questions, you may want to look over them to make sure you have not forgotten any of them and also over your answers to make sure you have not omitted anything you wanted to say. Please check also that your answers make sense. **[10]** This is the end of the exam. Please take this sheet with you as you leave, if you wish. **[•]** Thank you very much for your time, consideration and flexibility.

Departamento de Matemáticas

Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS/ FURTHER MATHEMATICS
Examen Final Ordinario (3 de junio de 2019) / Final Exam (June 3, 2019)
Tiempo máximo: 2 h. y 30 m. / Maximum time: 2 h. and 30 m.
Máxima puntuación: 100 ptos. + 20 ptos. extra / Top grade: 100 pt + 20 extra pt

Profesor / Professor:
Juan Miguel León-Rojas

POR FAVOR, PRIMERO LEA ESTO: [0] Escriba su nombre y número de DNI en *cada página*. [1] Este examen debe hacerse sin ayuda: *usted no puede tener* libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes ...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de usted; todos ellos deben ser guardados lejos y apagados si es el caso; si se observa que usted está usando material documental o un dispositivo de almacenamiento o comunicación, deberá abandonar el examen y obtendrá una puntuación de cero. [2] Informe al profesorado encargado y excúsese por adelantado si necesita salir durante el examen; de otro modo, deberá permanecer en la sala hasta que usted la termine. [3] Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero (el orden de las respuestas no importa). [4] No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, por una respuesta incorrecta sí podría obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentaciones o inferencias sean pertinentes, claras y lógicamente válidas. [5] Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización cuentan. [6] Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su participación en este examen no será calificada. [7] Si entrega sus hojas de respuestas, *es recomendable* que también entregue los borradores de las soluciones (eso sí, razonablemente organizados), ¿por qué?, porque ayuda a saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento, en la evaluación de sus competencias. [8] Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Si tiene nervios, cierre sus ojos y respire profunda y prolongadamente cuatro veces seguidas (inhalar y exhalar cuenta como una vez); le ayudará a relajarse y concentrarse. [•] Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PLEASE READ FIRST: [0] Write your name and national ID number on *each page*. [1] This is a closed-book exam: you *are not allowed* to have books, notes, e-books, calculators, cell phones, PDAs, tablets, phablets, pagers, .mp3/4/.../n players, smart devices (pens, phones, watches ...) or any other communicating/storage devices on or near your person during the exam; all of them must be put away and turned off if it is the case; if you are observed using any documentary or communication/storage device you will be asked to drop the exam and you will have a credit score of zero. [2] Inform the teaching staff in charge and present excuse in advance if you must leave while doing the exam; otherwise you are to be here until you finish doing it. [3] As you go over the questions, look for the easy ones and do them first (the order of the answers does not matter). [4] Do not simplify your answers, write legibly and explain your work, *showing all intermediate steps*; if your work is absent, illegible or your answer is given without justification, then no partial credit can be awarded; however, an incorrect answer may get partial credit as long as your argumentations or inferences are relevant, clear and logically valid. [5] Please label, or define, any variables and notation you choose to work with; also explain how you are solving each question as you go along, for example, *stating clearly any theorem or result you use*; neatness, cleanliness and organization count. [6] You are free to hand in your answer papers; if you do not hand in them, your participation on this exam will not be scored. [7] If you hand in your answer papers, *it is advisable* that you hand in also your rough work on scratch paper (although it must be reasonably arranged), why?, because it helps to know more about your knowledge and learning potential, in assessing your competences. [8] You have previously solved similar questions. If you are nervous, close your eyes and breath long and deeply four times in a row (inhaling and exhaling count as one time); it will help you relax and focus during this exam. [•] I am hoping your efforts bear fruit. Do well!

PARTE 1: (24 h GG y 8 h S/L ⇒ 61,6 por ciento $\Rightarrow_{\text{aprox.}}$ 3 cuestiones [60 puntos de 100]). ¡Más 12 puntos extra!

PART 1: (24 h LG y 8 h S/L ⇒ 61.6 per cent $\Rightarrow_{\text{approx.}}$ 3 questions [60 points out of 100]). Plus 12 extra points!

① (20 puntos / 20 points).-

Considere el argumento:

«Las IA (inteligencias artificiales) manejan creencias, pero una multitud de IA no es caótica, sino que está organizada colectivamente. De hecho, si una multitud de IA se organiza colectivamente y no es caótica, es porque las IA manejan creencias. Por tanto, puede concluirse que una multitud de IA no se organizará colectivamente siempre que no haya IA que manejen creencias».

Haga lo siguiente:

a) ▶ Formalice dicho argumento en lógica proposicional. Llámelo $\mathcal{A}$. (2 ptos.)

b) ▶ Demuestre si $\mathcal{A}$ es o no es un argumento válido, usando:

b.1) • reglas de inferencia o tablas semánticas —usted decide qué usa (12 ptos.);

b.2) • tablas de verdad como método de refutación o reducción al absurdo o formas normales —de nuevo, usted decide (6 ptos.)

Consider the argument:

'AIs (artificial intelligences) handle beliefs, yet a multitude of AIs is not chaotic, but instead is organised collectively. In fact, if a multitude of AIs is organised collectively and is not chaotic, is because AIs handle beliefs. Therefore, it can be concluded that a multitude of AIs will not be organised collectively as long as there are no AIs that handle beliefs.'

Do the following:

(a) ▶ Formalise this argument in propositional logic. Name it $\mathcal{A}$. (2 pt)

(b) ▶ Prove whether $\mathcal{A}$ is a valid argument or not, using:

(b.1) • rules of inference or semantic tableaux —the decision is yours (12 pt);

(b.2) • truth tables as a rebuttal method or reductio ad absurdum or normal forms —again, the decision is yours. (6 pt)

② (20 puntos / 20 points).-

a) Sea $(C;+)$ un monoide abeliano en el que el único elemento invertible es el neutro. Sea R la relación binaria definida en C por:

$$xRy \Leftrightarrow (\exists c \in C)(x + c = y),$$

siendo x e y elementos de C.

a.1) ▶ Demuestre si R satisface o no las propiedades i) • reflexiva, ii) • simétrica, iii) • antisimétrica, iv) • transitiva y v) • conexa (1,75 ptos. c/u) y ▶ diga vi) • qué tipo de relación es y vii) • por qué (0,625 ptos. c/u);

a.2) ▶ • Proporcione un ejemplo de monoide abeliano $(C;+)$ en el que el único elemento invertible es el neutro y considerando R actuando en él, • muestre cuáles son las clases de equivalencia, las clases de tolerancia (vecindades) o dibuje un diagrama de Hasse, dependiendo de que R sea una relación de equivalencia, una relación de tolerancia o una relación de orden en $(C;+)$. (5 ptos.)

b) Sea $(C;+)$ un semigrupo tal que cualesquiera $x, y \in C$ satisfacen:

$$x + y = y + x \Rightarrow x = y.$$

▶ Demuestre que todo $c \in C$ es idempotente, esto es, que $c + c = c$. (5 ptos.)

(a) Let $(C;+)$ be an Abelian monoid in which the only invertible element is the identity. Let R be the binary relation on C defined by:

$$xRy \Leftrightarrow (\exists c \in C)(x + c = y),$$

where x and y are elements of C.

(a.1) ▶ Prove whether or not R is i) • reflexive, ii) • symmetric, iii) • antisymmetric, iv) • transitive and/or v) • connex (1.75 pt ea) and ▶ say vi) • what sort of relation is and vii) • why it is so (0.625 pt ea);

(a.2) ▶ • Give an example of an Abelian monoid $(C;+)$ in which the only invertible element is the identity and assuming R acting on it, • show what are the equivalence classes, the tolerance classes (neighbourhoods) or draw a Hasse diagram, depending on whether R on $(C;+)$ is an equivalence relation, a tolerance relation or an order relation. (5 pt)

(b) Let $(C;+)$ be a semigroup such that every $x, y \in C$ satisfy:

$$x + y = y + x \Rightarrow x = y.$$

▶ Prove that every $c \in C$ is an idempotent, in other words that $c + c = c$. (5 pt)

Parte 1: Cuestiones 3 y 4; Parte 2: Cuestiones 5, 6 y 7.
Dele la vuelta a la hoja. ↬

Part 1: Questions 3 and 4; Part 2: Questions 5, 6 and 7.
Turn the sheet over. ↬

3 (20 puntos / 20 points).-

Un robot se mueve hacia adelante dando saltos de exactamente 2 m (salto corto) o 3 m (salto largo), perfectamente alineados en horizontal. Si tiene que recorrer 23 m en línea recta, ► calcule cuántos saltos cortos y cuántos saltos largos debe dar, siendo el número total de saltos (cortos + largos) el menor posible.
⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted use la teoría de las ecuaciones diofánticas para, razonadamente: a) • proponer una ecuación diofántica y utilizando un máximo común divisor demostrar que tiene al menos una solución entera; • calcular: b) · una solución particular de ella; c) · su solución general; d) · la solución de la situación en estudio. (5 ptos. c/u)

A robot moves forward by hopping exactly 2 m or by leaping exactly 3 m perfectly horizontally aligned. If it has to walk 23 m in a straight line, ► calculate how many hops and how many leaps the robot has to take if the total number of jumps (hops + leaps) is needed to be as lower as possible.
⚠ In order to solve this question, you are required to use the theory of Diophantine equations to reasonably: (a) • provide a Diophantine equation and use a greatest common divisor to prove that this equation has at least one integer solution; • calculate: (b) · a particular solution to it; (c) · its general solution; (d) · the solution to the situation under study. (5 pt ea)

4 (12 PUNTOS EXTRA / 12 EXTRA POINTS).-

(Merece la pena intentar esta cuestión, podría ayudarle a mejorar su calificación).

a) En el sistema decimal, al dividir entre 4 el divisor d, el cociente entero q y el resto r de una división, se obtienen los restos 1, 2 y 3, respectivamente. ► ¿Cuál es el dividendo D de dicha división si se sabe que D es el mayor número de 3 cifras decimales que satisface lo dicho? (10 ptos.)
b) ► Demuestre que $n(n^2+5)$ es divisible por 6 para cualquier entero positivo n. (10 ptos.)

⚠ Para resolver ambas partes de esta cuestión, se exige que usted utilice el algoritmo de la división, la teoría de congruencias o la teoría de divisibilidad en general.

PARTE 2: (15 h GG y 5 h S/L ⇒ 38,4 por ciento ⇒$_{\text{approx.}}$ 2 cuestiones [40 puntos de 100]). ¡Más 8 puntos extra!

(This question is worth a try, it might help you boost your grade).

(a) In the decimal system, the divisor d, the integer quotient q and the remainder r of a given division leave remainders of 1, 2, and 3, respectively, when divided by 4. ► What is the dividend D of this division if it is known that D is the greatest 3-digit number that meets all of the above? (10 pt)
(b) ► Prove that $n(n^2+5)$ is divisible by 6 for any positive integer n. (10 pt)

⚠ In order to solve both parts of this question, you are required to use the division algorithm, the theory of congruences or divisibility theory in general.

PART 2: (15 h LG and 5 h S/L ⇒ 38.4 per cent ⇒$_{\text{approx.}}$ 2 questions [40 points out of 100]). Plus 8 extra points!

5 (20 puntos / 20 points).-

a) ► ¿De cuántas formas pueden colocarse alineadas las 5 cifras decimales pares y las 5 cifras decimales impares de manera que no haya dos cifras decimales impares juntas? (5 ptos.)
b) ► ¿De cuántas formas pueden escogerse 7 cifras decimales distintas,
  b.1) • de las que 4 sean pares y 3 impares? (5 ptos.)
  b.2) • de las que a lo sumo 4 sean pares? (5 ptos.)
  b.3) • si debe haber al menos 3 cifras pares y exactamente 2 impares? (5 ptos.)

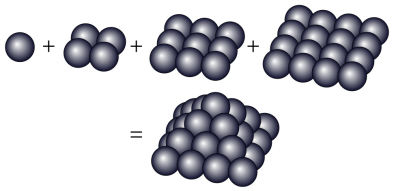
⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted: • modelice detalladamente la situación descrita como un problema de distribución/ocupación (distribución de objetos en recipientes) y • aplique la teoría correspondiente (recuerde, existen 24 distribuciones, 16 no ordenadas y 8 ordenadas).

(a) ► In how many ways may we put them aligned, the 5 even decimal digits and the 5 odd decimal digits in such a way that no two odd decimal digits are together? (5 pt)
(b) ► In how many ways can we choose 7 distinct decimal digits,
  (b.1) • of which 4 are even and 3 odd? (5 pt)
  (b.2) • of which at most 4 are even? (5 pt)
  (b.3) • if at least 3 digits must be even and exactly 2 must be odd? (5 pt)

⚠ In order to solve this question, you are required to: • model in detail the situation described as a distribution/occupancy problem (distributing objects to recipients), and • apply the corresponding theory (remember, there are 24 distributions, 16 non ordered and 8 ordered).

6 (20 puntos / 20 points).-

► ¿Cuántas bolas son necesarias para formar una pirámide de base cuadrada de n pisos? En la figura, puede apreciarse que hicieron falta 30(= 1+4+9+16) para formar una pirámide de base cuadrada de 4 pisos.



► How many balls do we need to build a square-based pyramid of n floors? In the figure, it can be seen that 30 (= 1 + 4 + 9 + 16) balls were required to build one square-based pyramid of 4 floors.

⚠ Se exige que usted: a) • escriba una ecuación en diferencias, con condiciones iniciales (de contorno) si son necesarias, que modele la situación y supuestos dados (2 ptos.); b) • clasifique dicha ecuación en diferencias (establezca si es lineal, homogénea, si los coeficientes son constantes e identifique su orden) (2 ptos.); c) • solucione este problema de valores iniciales de ecuaciones en diferencias para así obtener y demostrar su única solución particular en forma explícita. (16 ptos.)

⚠ You are required to: (a) • write a difference equation with initial (boundary) conditions if needed, that model the given situation and assumptions (2 pt); (b) • classify this difference equation (state whether it is linear, homogeneous, whether the coefficients are constants and identify its order/degree) (2 pt); (c) • solve this difference equation initial value problem in order to obtain and prove its only particular explicit/closed-form solution. (16 pt)

7 (8 PUNTOS EXTRA / 8 EXTRA POINTS).-

(Merece la pena intentar esta cuestión, podría ayudarle a mejorar su calificación).

El profesorado de cierto departamento quiere poner un examen de puntuación máxima 12 puntos con 4 cuestiones de tal manera que cada una puntúe como mínimo dos puntos. ► Encuentre el número total de formas de crear tal hoja de examen.
⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted: • modelice detalladamente la situación descrita como un problema de distribución/ocupación (distribución de objetos en recipientes) y • aplique la teoría correspondiente (recuerde, existen 24 distribuciones, 16 no ordenadas y 8 ordenadas).

(This question is worth a try, it might help you boost your grade).

Lecturers from a certain department wish to give a question paper for 12 marks with 4 questions so that each question carries 2 or more marks. ► Find the number of ways of setting such a question paper.
⚠ In order to solve this question, you are required to: • model in detail the situation described as a distribution/occupancy problem (distributing objects to recipients), and • apply the corresponding theory (remember, there are 24 distributions, 16 non ordered and 8 ordered).

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO: [9] Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, compruebe también que sus respuestas tienen sentido. [**10**] Este es el final del examen. Por favor, cuando se marche, llévese esta hoja, si quiere. [•] Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

PLEASE READ LAST: [9] When you have finished answering the questions, you may want to look over them to make sure you have not forgotten any of them and also over your answers to make sure you have not omitted anything you wanted to say. Please check also that your answers make sense. [**10**] This is the end of the exam. Please take this sheet with you as you leave, if you wish. [•] Thank you very much for your time, consideration and flexibility.

Departamento de Matemáticas
Department of Mathematics

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS/ FURTHER MATHEMATICS
Examen Final Extraordinario (25 de junio de 2019) / Resit Final Exam (June 25, 2019)
Tiempo máximo: **2 h. y 30 m.** / Maximum time: **2 h. and 30 m.**
Máxima puntuación: **100 ptos. + 20 ptos. extra** / Top grade: **100 pt + 20 extra pt**

Profesor / Professor:
Juan Miguel León-Rojas

POR FAVOR, PRIMERO LEA ESTO: [0] Escriba su nombre y número de DNI en *cada página*. [1] Este examen debe hacerse sin ayuda: *usted no puede tener* libros, apuntes, libros electrónicos, calculadoras, teléfonos móviles, PDA, tabletas, tabléfonos, buscapersonas, reproductores de .mp3/4/.../n, dispositivos inteligentes (bolígrafos, teléfonos, relojes ...) ni otros dispositivos de almacenamiento o comunicación, encima o cerca de usted; todos ellos deben ser guardados lejos y apagados si es el caso; si se encuentra cualquiera de ellos cerca de usted o se observa que usted está usando material documental o un dispositivo de almacenamiento o comunicación, deberá abandonar el examen y obtendrá una puntuación de cero. [2] Informe al profesorado encargado y excúsese por adelantado si necesita salir durante el examen; de otro modo, deberá permanecer en la sala hasta que usted la termine. [3] Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero (el orden de las respuestas no importa). [4] No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, por una respuesta incorrecta sí podría obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentaciones o inferencias sean pertinentes, claras y lógicamente válidas. [5] Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización cuentan. [6] Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su participación en este examen no será calificada. [7] Si entrega sus hojas de respuestas, *es recomendable* que también entregue los borradores de las soluciones (eso sí, razonablemente organizados), ¿por qué?, porque ayuda a saber más de su potencial de aprendizaje y conocimiento, en la evaluación de sus competencias. [8] Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Si tiene nervios, cierre sus ojos y respire profunda y prolongadamente cuatro veces seguidas (inhalar y exhalar cuenta como una vez); le ayudará a relajarse y concentrarse. [•] Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PLEASE READ FIRST: [0] Write your name and national ID number on *each page*. [1] This is a closed-book exam: you *are not allowed* to have books, notes, e-books, calculators, cell phones, PDAs, tablets, phablets, pagers, .mp3/4/.../n players, smart devices (pens, phones, watches ...) or any other communicating/storage devices on or near your person during the exam; all of them must be put away and turned off if it is the case; if any of them is found near you or you are observed using any documentary or communication/storage device you will be asked to drop the exam and you will have a credit score of zero. [2] Inform the teaching staff in charge and present excuse in advance if you must leave while doing the exam; otherwise you are to be here until you finish doing it. [3] As you go over the questions, look for the easy ones and do them first (the order of the answers does not matter). [4] Do not simplify your answers, write legibly and explain your work, *showing all intermediate steps*; if your work is absent, illegible or your answer is given without justification, then no partial credit can be awarded; however, an incorrect answer may get partial credit as long as your argumentations or inferences are relevant, clear and logically valid. [5] Please label, or define, any variables and notation you choose to work with; also explain how you are solving each question as you go along, for example, *stating clearly any theorem or result you use*; neatness, cleanliness and organization count. [6] You are free to hand in your answer papers; if you do not hand in them, your participation on this exam will not be scored. [7] If you hand in your answer papers, *it is advisable* that you hand in also your rough work on scratch paper (although it must be reasonably arranged), why?, because it helps to know more about your knowledge and learning potential, in assessing your competences. [8] You have previously solved similar questions. If you are nervous, close your eyes and breath long and deeply four times in a row (inhaling and exhaling count as one time); it will help you relax and focus during this exam. [•] I am hoping your efforts bear fruit. Do well!

PARTE 1: (24 h GG y 8 h S/L ⇒ 61,6 por ciento ⇒$_{\text{aprox.}}$ 3 cuestiones [60 puntos de 100]). ¡Más 12 puntos extra!

PART 1: (24 h LG y 8 h S/L ⇒ 61.6 per cent ⇒$_{\text{approx.}}$ 3 questions [60 points out of 100]). Plus 12 extra points!

① (20 puntos / 20 points).-

Considere el argumento:

«Las personas colaboran cuando cooperan, pero no es cierto que cooperen si colaboran. Que las personas cooperen significa que se apoyan mutuamente. En definitiva, las personas se apoyan mutuamente siempre que cooperan aunque no colaboren».

Haga lo siguiente:

a) ▶ Formalice dicho argumento en lógica proposicional. Llámelo $\mathcal{A}$. (2 ptos.)

b) ▶ Demuestre si $\mathcal{A}$ es o no es un argumento válido, usando:

b.1) • reglas de inferencia o tablas semánticas —usted decide qué usa (12 ptos.);

b.2) • tablas de verdad como método de refutación o reducción al absurdo o formas normales —de nuevo, usted decide (6 ptos.)

Consider the argument:

'People collaborate when cooperate, but it is not true that they cooperate if they collaborate. That people cooperate means that they provide mutual aid to one another. Definitively, people provide mutual aid to one another as long as they cooperate even if they do not collaborate.'

Do the following:

(a) ▶ Formalise this argument in propositional logic. Name it $\mathcal{A}$. (2 pt)

(b) ▶ Prove whether $\mathcal{A}$ is a valid argument or not, using:

(b.1) • rules of inference or semantic tableaux —the decision is yours (12 pt);

(b.2) • truth tables as a rebuttal method or reductio ad absurdum or normal forms —again, the decision is yours. (6 pt)

② (20 puntos / 20 points).-

a) Sean el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, C el conjunto de todas las palabras (cadenas binarias finitas, incluida la cadena vacía) y $+$ la operación binaria de concatenación en C (a modo de ilustración, si $x = 010$, $y = 10$ y $z = 01$, entonces, por ejemplo, $x + y + z = 0101001$ y $z + x + y = 0101010$). Sea Σ^* el monoide abeliano $(C; +)$ (la cadena vacía ϵ es el neutro). Sea $\preccurlyeq$ la relación binaria definida en Σ^* por:

$$(\forall s_1, s_2 \in \Sigma^*)\left(s_1 \preccurlyeq s_2 \Leftrightarrow (\exists c, c' \in \Sigma^*)(s_2 = c + s_1 + c')\right).$$

a.1) ▶ Demuestre si $\preccurlyeq$ satisface o no las propiedades i) • reflexiva, ii) • simétrica, iii) • antisimétrica, iv) • transitiva y v) • conexa (1,75 ptos. c/u) y ▶ diga vi) • qué tipo de relación es y vii) • por qué (0,625 ptos. c/u);

a.2) ▶ Proporcione un ejemplo de conjunto C y considerando $\preccurlyeq$ actuando en $\Sigma^* = (C; +)$, ▶ muestre cuáles son las clases de equivalencia, las clases de tolerancia (vecindades) o dibuje un diagrama de Hasse, dependiendo de que $\preccurlyeq$ sea una relación de equivalencia, una relación de tolerancia o una relación de orden en Σ^*. (5 ptos.)

b) b.1) ▶ Demuestre que un semigrupo $(S; *)$ con más de un elemento idempotente no puede ser un grupo. (2,5 ptos.)

b.2) ▶ Proporcione un ejemplo de un semigrupo $(S; \square)$ que no sea grupo. Razone el porqué. (2,5 ptos.)

(a) Let $\Sigma = \{0, 1\}$ be the alphabet, C the set of all words (finite binary strings, including the empty string) and let $+$ be the binary concatenation operation in C (by way of illustration, if $x = 010$, $y = 10$ and $z = 01$, then, for example, $x + y + z = 0101001$ and $z + x + y = 0101010$). Let Σ^* be the Abelian monoid $(C; +)$ (the empty string ϵ is the identity). Let $\preccurlyeq$ be the binary relation defined on Σ^* by:

$$(\forall s_1, s_2 \in \Sigma^*)\left(s_1 \preccurlyeq s_2 \Leftrightarrow (\exists c, c' \in \Sigma^*)(s_2 = c + s_1 + c')\right).$$

(a.1) ▶ Prove whether or not $\preccurlyeq$ is i) • reflexive, ii) • symmetric, iii) • antisymmetric, iv) • transitive and/or v) • connex (1.75 pt ea) and ▶ say vi) • what sort of relation is and vii) • why it is so (0.625 pt ea);

(a.2) ▶ Give an example of a set C and assuming $\preccurlyeq$ acting on $\Sigma^* = (C; +)$, ▶ show what are the equivalence classes, the tolerance classes (neighbourhoods) or draw a Hasse diagram, depending on whether $\preccurlyeq$ on Σ^* is an equivalence relation, a tolerance relation or an order relation. (5 pt)

(b) (b.1) ▶ Prove that a semigroup $(S; *)$ with more than one idempotent cannot be a group. (2.5 pt)

(b.2) ▶ Give an example of a semigroup $(S; \square)$ which is not a group. Give a reason why this is so. (2.5 pt)

Parte 1: Cuestiones 3 y 4; Parte 2: Cuestiones 5, 6 y 7.
Dele la vuelta a la hoja. ↬

Part 1: Questions 3 and 4; Part 2: Questions 5, 6 and 7.
Turn the sheet over. ↬

3 (20 puntos / 20 points).-

En los enteros, considere la sucesión definida como sigue: comenzando en 0, cada término se obtiene del anterior sumándole o restándole 2 o 3 a este último. ▶ Demuestre que esta sucesión siempre alcanza el 4 (a modo de ilustración, p. ej., $0 \overset{-2}{\to} -2 \overset{+3}{\to} 1 \overset{+3}{\to} 4$).
⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted use la teoría de las ecuaciones diofánticas para, razonadamente: a) • proponer una ecuación diofántica y utilizando un máximo común divisor demostrar que tiene al menos una solución entera; • calcular: b) · una solución particular de ella; c) · su solución general; d) · la solución de la situación en estudio. (5 ptos. c/u)

Over the integers, consider the sequence defined as follows: start with 0, then each term is obtained from the previous term adding or subtracting 2 or 3 to the latter. ▶ Prove that this sequence will always reach 4 (by way of illustration, e.g. $0 \overset{-2}{\to} -2 \overset{+3}{\to} 1 \overset{+3}{\to} 4$).
⚠ In order to solve this question, you are required to use the theory of Diophantine equations to reasonably: (a) • provide a Diophantine equation and use a greatest common divisor to prove that this equation has at least one integer solution; • calculate: (b) · a particular solution to it; (c) · its general solution; (d) · the solution to the situation under study. (5 pt ea)

4 (12 PUNTOS EXTRA / 12 EXTRA POINTS).-

(Merece la pena intentar esta cuestión, podría ayudarle a mejorar su calificación).

a) ▶ ⚠ Use el criterio general de divisibilidad para hallar un criterio de divisibilidad por 11 en el sistema de numeración decimal (base 10). (6 ptos.)
b) ▶ ⚠ Use el criterio de divisibilidad hallado en a) para encontrar todos los valores de a y b para los que el número decimal de tres cifras $1ab$ es divisible por 55. (6 ptos.)

(This question is worth a try, it might help you boost your grade).

(a) ▶ ⚠ Use the general divisibility rule to find a divisibility rule by 11 in the decimal numeral system (base 10). (6 pt)
(b) ▶ ⚠ Use the divisibility rule found in (a) to find out all the possible values of a and b for which the three-digit decimal number $1ab$ is divisible by 55. (6 pt)

PARTE 2: (15 h GG y 5 h S/L ⇒ 38,4 por ciento ⇒$_{\text{approx.}}$ 2 cuestiones [40 puntos de 100]). ¡Más 8 puntos extra!

PART 2: (15 h LG and 5 h S/L ⇒ 38.4 per cent ⇒$_{\text{approx.}}$ 2 questions [40 points out of 100]). Plus 8 extra points!

5 (20 puntos / 20 points).-

El profesorado de cierto departamento está estudiando las posibles distribuciones de p personas en las q filas de sillas de un aula de examen ($q \leq p$). Suponga que la capacidad de cada fila es ilimitada.

a) ▶ ¿Cuántas disposiciones posibles de personas hay si
  a.1) • no hay filas vacías? (4 ptos.)
  a.2) • en la segunda fila hay exactamente s personas ($s \leq p$)? (4 ptos.)
  a.3) • en las primeras r filas hay a_1, a_2, ..., a_r personas, respectivamente ($a_1 + a_2 + \cdots + a_r \leq p$)? (4 ptos.)
  a.4) • en la fila i-ésima se encuentran no menos de a_i personas ($\forall i \in \{1, 2, \ldots, q\}$) ($a_1 + a_2 + \cdots + a_q \leq p$)? (4 ptos.)
b) ▶ Para $p = 7$, $q = 3$, $s = 2$, $r = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 3$, calcule los resultados a.1) ... a.4) anteriores. (1 pto. c/u)

⚠ Se exige que usted: • modelice detalladamente cada situación descrita como un problema de distribución de objetos en recipientes y • aplique la teoría correspondiente (recuerde, existen 24 distribuciones, 16 no ordenadas y 8 ordenadas).

Lecturers from a certain department are exploring how to sit p people in q rows of chairs in an examination room ($q \leq p$). Let us assume that each row has an unlimited capacity.

(a) ▶ How many possible arrangements of people can be formed if
  (a.1) • there are no empty rows? (4 pt)
  (a.2) • there are exactly s people sat in the second row ($s \leq p$)? (4 pt)
  (a.3) • there are a_1, a_2, ..., a_r people sat in the first r rows, respectively ($a_1 + a_2 + \cdots + a_r \leq p$)? (4 pt)
  (a.4) • there are no less than a_i people sat in the ith row ($\forall i \in \{1, 2, \ldots, q\}$) ($a_1 + a_2 + \cdots + a_q \leq p$)? (4 pt)
(b) ▶ Calculate the above results (a.1) ... (a.4) for $p = 7$, $q = 3$, $s = 2$, $r = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, and $a_3 = 3$. (1 pt ea)

⚠ You are required to: • model in detail each situation described as a distribution problem (distributing objects to recipients), and • apply the corresponding theory (remember, there are 24 distributions, 16 non ordered and 8 ordered).

6 (20 puntos / 20 points).-

Las únicas contraseñas válidas para un sistema informático son las cadenas finitas de dígitos ternarios (base 3) que contienen un número par de ceros (se permiten ceros encabezando la cadena). ▶ Calcule el número de contraseñas válidas de longitud n.
⚠ Se exige que usted: a) • escriba una ecuación en diferencias y condiciones iniciales (de contorno) si son necesarias, que modelen la situación y supuestos dados (2 ptos.); b) • clasifique dicha ecuación en diferencias (establezca si es lineal, homogénea, si los coeficientes son constantes e identifique su orden) (2 ptos.); c) • solucione este problema de valores iniciales de ecuaciones en diferencias para así obtener y demostrar su única solución particular en forma explícita (16 ptos.).

The only valid passwords for a computer system are the finite strings of ternary (base 3) digits which contain an even number of 0 digits (leading zeros are permitted). ▶ Calculate the number of valid n-digit passwords.
⚠ You are required to: (a) • write a difference equation and initial (boundary) conditions if needed, that model the given situation and assumptions (2 pt); (b) • classify this difference equation (state whether it is linear, homogeneous, whether the coefficients are constants and identify its order/degree) (2 pt); (c) • solve this difference equation initial value problem in order to obtain and prove its only particular explicit/closed-form solution (16 pt).

7 (8 PUNTOS EXTRA / 8 EXTRA POINTS).-

(Merece la pena intentar esta cuestión, podría ayudarle a mejorar su calificación).

En el primer millar de números enteros no negativos, esto es, desde 0 hasta 999, ambos incluidos, ▶ ¿qué hay más, números que tienen alguna cifra 1 o números que no la tienen?
⚠ Se exige que usted: • modelice detalladamente la situación descrita como un problema de distribución de objetos en recipientes y • aplique la teoría correspondiente (recuerde, existen 24 distribuciones, 16 no ordenadas y 8 ordenadas).

(This question is worth a try, it might help you boost your grade).

In the first thousand nonnegative integers, that is to say, from 0 to 999, both included, ▶ what are there more of, numbers containing 1 in their digits or numbers which do not?
⚠ You are required to: • model in detail the situation described as a distribution problem (distributing objects to recipients), and • apply the corresponding theory (remember, there are 24 distributions, 16 non ordered and 8 ordered).

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO: [9] Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, compruebe también que sus respuestas tienen sentido. [**10**] Este es el final del examen. Por favor, cuando se marche, llévese esta hoja, si quiere. [•] Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

PLEASE READ LAST: [9] When you have finished answering the questions, you may want to look over them to make sure you have not forgotten any of them and also over your answers to make sure you have not omitted anything you wanted to say. Please check also that your answers make sense. [**10**] This is the end of the exam. Please take this sheet with you as you leave, if you wish. [•] Thank you very much for your time, consideration and flexibility.

Departamento
de Matemáticas

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen para hacer en casa (2020)

Tiempo máximo: **25 mayo, 00:00 CEST - 10 junio, 23:59 CEST**

Máxima puntuación: **100 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

... ... Nombre y apellidos ... ...

DNI ... ...

... ...@alumnos.unex.es

RÚBRICA DE PUNTUACIÓN (Cada apartado de las cuestiones se puntuará de acuerdo con estos criterios de puntuación)

Excede con creces los estándares	90 % - 100 %	Presenta temas complejos de manera clara, concisa y creíble; prácticamente ningún error; formulación lógica; respuesta completa, profusamente referenciada, a veces utilizando estrategias propias, otras veces encontrando y mostrando diferentes estrategias alternativas de resolución o incluso planteando nuevas cuestiones de interés basadas en la cuestión abordada.
Excede los estándares	70 % - 89 %	Se comunica eficazmente en matemáticas, de forma lógica y bien ordenada; comprensión conceptual aparente; notación consistente, con sólo algún error ocasional; formulación lógica; respuesta completa o casi completa, apropiadamente referenciada.
Cumple con los estándares	50 % - 69 %	Utiliza un lenguaje matemático significativo; la comprensión conceptual es solo adecuada; hay errores matemáticos de descuido; faltan algunos pasos lógicos o relacionales; faltan algunas referencias; respuesta casi completa.
Necesita mejorar	30 % - 49 %	La comprensión conceptual no es adecuada; errores de procedimiento; faltan pasos lógicos o relacionales; faltan referencias; pobre, lejos de una respuesta completa.
Demasiado pobre	10 % - 29 %	Demasiada confusión en la comprensión conceptual; demasiados errores de procedimiento; faltan muchos pasos lógicos o relacionales; prácticamente ninguna referencia; muy pobre, muy lejos de ser una respuesta completa.
Falla	0 % - 9 %	No intenta resolver la cuestión o hay una ausencia total de comprensión conceptual.

(Vea también [2], [3], [4], [5], [6] y [7], más abajo).

POR FAVOR, AHORA LEA ESTO:

[0] Este examen no es supervisado, y usted puede acceder libremente a recursos y material de apoyo mientras lo completa.

[1] Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero.

[2] **Sus respuestas deben reflejar** que usted se comunica en matemáticas con efectividad, de una manera lógica y bien ordenada, y presenta cuestiones complejas de una manera bien escrita, clara y organizada; además, **deben ser obligatoriamente reforzadas con referencias explícitas**, esto es, para cada definición o resultado (teorema, corolario, propiedad, lema, identidad, ...) que utilice en sus respuestas, se exige que sea identificado explícitamente y que se haga referencia directa al material o recurso específico en el que se haya encontrado, como en los libros, diapositivas, notas resumen o cualquier otro material recomendado o no (por ejemplo, libros, artículos o páginas web descubiertos por usted o por compañeros/as que le hayan ayudado [reconociendo la labor de ayuda de estas personas; léase más adelante «Su código de honor»]).

[3] No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, por una respuesta incorrecta sí podría obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentaciones o inferencias sean pertinentes, claras y lógicamente válidas. **Su proceso de pensamiento es la mejor indicación de su comprensión, por lo tanto trate de reflejarlo en sus respuestas, con el mayor detalle**.

[4] Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización son imprescindibles.

[5] **Puntuaré muy positivamente extender las respuestas**, siendo esto algo muy personal, según el conocimiento que se tenga de los diferentes contenidos tratados en la asignatura —por ejemplo, encontrando diferentes estrategias alternativas de resolución, planteando nuevas preguntas de interés basadas en las cuestiones del examen, etcétera—. Como esto realmente excede los estándares, está principalmente pensado para aquellas personas que persigan las más altas calificaciones.

[6] **Su código de honor**: Se espera que usted mantenga el más alto nivel de integridad académica, con un comportamiento honesto y ético en todo momento. Usted es libre de colaborar con sus compañeras/os de asignatura mientras completan el examen, sin embargo: 1.º, si le han ayudado, **debe reconocer a aquellas personas que le ayudaron y su trabajo** (por ejemplo, «i) Xe@ me ha ayudado con la cuestión X, sobre los asuntos i1, i2, ..., exactamente en los siguientes puntos: ...; ii) @Xe me ha ayudado con la cuestión Y, sobre los asuntos...»), y 2.º, **todo el trabajo que entregue debe ser suyo**: a usted le está permitido discutir con sus compañeras/os de asignatura sobre las preguntas del examen, pero **debe escribir sus respuestas por su cuenta, usando sus propias palabras**. **Ayudar es aceptable; la copia, el engaño, el plagio y otras formas de deshonestidad académica son inaceptables y no serán toleradas**. En particular, está estrictamente prohibido compartir el contenido de sus respuestas con sus compañeros/as. En otras palabras, mientras que su ayuda a los demás es bienvenida, debe mantener el contenido de su examen confidencial. **La evidencia indudable de copia, engaño, plagio o cualquier otra deshonestidad académica implica que las personas involucradas recibirán una calificación final de 0 en la asignatura**.

[7] **Podría escribir sus respuestas en formato LaTeX u OpenDocument** (se le proporcionan sendas plantillas) utilizando las facilidades correspondientes de composición de lenguaje matemático, **o a mano, con letra muy clara**; en cualquier caso, **debe usar la notación matemática estándar**. La entrega de las respuestas se hará en el campus virtual de la UEx en formato PDF (vea [12], al final del examen).

[8] Usted es libre de entregar sus hojas de respuestas; si no las entrega, su participación en este examen no será calificada.

[9] Dudas durante el examen: No proporcionaré ninguna ayuda para resolver las cuestiones durante las dos semanas de realización del examen; solo responderé a las preguntas del tipo que hubiese respondido durante el examen final presencial.

[10] Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

1.ª cuestión (44 ptos.)

a) Sea $\mathcal{A}$ el siguiente argumento:

> «Los algoritmos que nunca deben usarse son los no eficientes socialmente, mientras son libres. Ningún algoritmo libre puede ser eficiente socialmente a menos que haya sido creado por un verdadero esfuerzo comunitario. Sucede además que nadie es capaz de distinguir entre un algoritmo creado por un verdadero esfuerzo comunitario y un algoritmo eficiente socialmente. Por otro lado, no se conoce ningún algoritmo no libre que haya sido creado por un verdadero esfuerzo comunitario y mucho menos que sea eficiente socialmente. Así que, solo los algoritmos no creados por un verdadero esfuerzo comunitario y los algoritmos no eficientes socialmente y los algoritmos no libres son los que nunca deben usarse».

Haga lo siguiente:

a.1) Formalice dicho argumento $\mathcal{A}$ en lógica proposicional, reflejando minuciosamente la estructura de cada enunciado que se formalice. (11 ptos.)

a.2) Demuestre, como mínimo con dos procedimientos de la lógica proposicional, que $\mathcal{A}$ no es un argumento válido. (5 ptos.)

a.3) Para cada uno de los dos procedimientos que ha usado en el apartado a.2,

a.3.1) halle los contramodelos que proporciona, (2 ptos.)

a.3.2) demuestre que efectivamente son contramodelos, (2 ptos.)

a.3.3) exprese en español los contraargumentos proporcionados por tales contramodelos que permiten refutar el argumento $\mathcal{A}$. (2 ptos.)

b) Sea $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, G, J, L, M, N, P\}$ un conjunto de diez entes determinados a partir de presentar cuatro cualidades en diferentes grados, del a al e, con $a \prec b \prec c \prec e$:
$A(b, a, a, b)$, $B(c, e, a, b)$, $C(c, d, b, a)$, $D(a, d, a, b)$,
$G(a, d, a, b)$, $J(a, b, c, a)$, $L(b, c, c, a)$, $M(c, a, a, b)$,
$N(b, a, a, b)$ y $P(b, b, c, a)$.

Caso 1: Sea R la relación binaria definida en $\mathcal{E}$ por:
$(\forall X, Y \in \mathcal{E})$ ($X \ R \ Y \Leftrightarrow X$ e Y presentan la primera cualidad en el mismo grado).

Caso 2: Sea R la relación binaria definida en $\mathcal{E}$ por:
$(\forall X, Y \in \mathcal{E})$ $(X(x_1, x_2, x_3, x_4) \ R \ Y(y_1, y_2, y_3, y_4) \Leftrightarrow \text{máx}(x_1, x_2) \prec \text{máx}(y_1, y_2) \vee \text{máx}(x_1, x_2) = \text{máx}(y_1, y_2))$.

Caso 3: Sea R la relación binaria definida en $\mathcal{E}$ por:
$(\forall X, Y \in \mathcal{E})$ ($X \ R \ Y \Leftrightarrow X$ e Y no difieren en más de una de las cuatro cualidades).

En cada uno de estos tres casos,

b.1) averigüe qué tipo de relación es R y por qué, estudiando si R satisface o no las propiedades i) reflexiva, ii) simétrica, iii) antisimétrica, iv) transitiva y v) conexa (fuertemente completa) (0,733 ptos. c/u, en cada uno de los tres casos);

b.2) halle las clases de equivalencia, las clases de tolerancia o dibuje un diagrama de Hasse, dependiendo de que R sea una relación de equivalencia, una relación de tolerancia o una relación de orden en $\mathcal{E}$. (3,66 ptos. en cada uno de los tres casos).

Respuesta a la 1.ª cuestión

a) ... ...
a.1) ... ...
a.2) ... ...
a.3) ... ...
Procedimiento 1
a.3.1) ... ...
a.3.2) ... ...
a.3.3) ... ...
Procedimiento 2
a.3.1) ... ...
a.3.2) ... ...
a.3.3) ... ...

b) ... ...
Caso 1: Sea R la relación binaria definida en $\mathcal{E}$ por:
$(\forall X, Y \in \mathcal{E})$ ($X \ R \ Y \Leftrightarrow X$ e Y presentan la primera cualidad en el mismo grado).
b.1) ... ...
b.2) ... ...
Caso 2: Sea R la relación binaria definida en $\mathcal{E}$ por:
$(\forall X, Y \in \mathcal{E})$ $(X(x_1, x_2, x_3, x_4) \ R \ Y(y_1, y_2, y_3, y_4) \Leftrightarrow \text{máx}(x_1, x_2) \prec \text{máx}(y_1, y_2) \vee \text{máx}(x_1, x_2) = \text{máx}(y_1, y_2))$.
b.1) ... ...
b.2) ... ...
Caso 3: Sea R la relación binaria definida en $\mathcal{E}$ por:
$(\forall X, Y \in \mathcal{E})$ ($X \ R \ Y \Leftrightarrow X$ e Y no difieren en más de una de las cuatro cualidades).
b.1) ... ...
b.2) ... ...

2.ª cuestión (22 ptos.)

a) ¿Cuál es el menor número decimal n tal que su producto por 11 —esto es, $11n$— se escribe en base 13 (sistema de numeración tridecimal) solo con cifras 6, esto es, $66\ldots6_{(13}$? (11 ptos.)
⚠ Para resolver este apartado, se exige que usted utilice el algoritmo de la división, la teoría de congruencias, la teoría de las ecuaciones diofánticas o la teoría de divisibilidad en general. Si usa un criterio de divisibilidad, debe demostrarlo.

b) Considere una red en línea (en bus) de 18 computadores, en la que hay 17 computadores de igual potencia de cómputo y al final de la red, uno de menor (de nombre Litty). Se trata de repartir n tareas entre todos estos computadores. La primera vez se decide repartir las tareas por igual entre los 17 y las que sobren para Litty, recibiendo este tres tareas. Tras un fallo generalizado, no puede contarse ya con 6 de los de mayor potencia; entonces, se vuelven a repartir las tareas por igual entre los de mayor potencia, recibiendo cuatro Litty. De nuevo se produce otro fallo generalizado, quedando solo 6 de los computadores de mayor potencia y Litty. Se hace un nuevo reparto, de nuevo por igual entre los de mayor potencia, recibiendo 5 Litty. La pregunta es, ¿cuál es el mínimo número n de tareas que se ha estado repartiendo siempre?
Resuelva este apartado,
b.1) por la teoría de congruencias (5, 5 ptos.) y
b.2) por la teoría de las ecuaciones diofánticas. (5, 5 ptos.)
Si usa un criterio de divisibilidad, debe demostrarlo.

Respuesta a la 2.ª cuestión

a) ... ...
b) ... ...
b.1) ... ...
b.2) ... ...

PARTE 2: Combinatoria y Ecuaciones en diferencias.

3.ª cuestión (17 ptos.)

Imagine ahora que para aumentar la seguridad de la red en línea de 18 computadores del apartado 2.b (por ejemplo, para evitar situaciones de propagación de programas malignos) se desea segmentarla en 4 subredes en línea (espacios de red más pequeños) de como mínimo una tríada de computadores cada una.

a) ¿De cuántas maneras puede llevarse esto a cabo? (8,5 ptos.)
b) Se prevé que si ocurre un fallo general (como en el apartado 2.b) no podrá contarse con exactamente 6 de los computadores de los de mayor potencia (aunque no se sabe de cuáles se trataría), entonces, ¿de cuántas maneras puede llevarse a término la segmentación en subredes planteada si, como hemos dicho, vamos a estar obligados a prescindir de 6 computadores de los de mayor potencia sin saber de cuáles se trata? (8,5 ptos.)

Respuesta a la 3.ª cuestión

a) ... ...
b) ... ...

4.ª cuestión (17 ptos.)

En clase hemos interpretado las soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ ($k, n \in \mathbb{Z}^+$) en el contexto de la selección de muestras, la distribución de objetos en recipientes, la partición de un multiconjunto en submulticonjuntos y la descomposición de un entero positivo en sumandos enteros no negativos. Aquí se pide:

a) Si s_k representa el número de soluciones no negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$, halle una ecuación en diferencias para s_k (n fijo) y encuentre finalmente una expresión explícita (fórmula cerrada) tan simple como sea posible para s_k. (8,5 ptos.)
b) Haga lo mismo que en el apartado 4.a, para el caso general de coeficientes naturales, esto es, para $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = k$, con $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$. (8,5 ptos.)

Nota: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Respuesta a la 4.ª cuestión

a) ... ...
b) ... ...

PARTE 3: Autoevaluación y reflexión.
Importante: Responder a las cuestiones 5 y 6 de una manera sensata y razonable es obligatorio para que el examen sea calificado.

5.ª cuestión (Autoevaluación)

Escriba su autoevaluación de su trabajo durante el curso.

Respuesta a la 5.ª cuestión

... ...
... ...

6.ª cuestión (Reflexión)

Escriba una reflexión sobre los problemas encontrados en el examen con respecto a la resolución de las cuatro cuestiones principales.

Respuesta a la 6.ª cuestión

... ...
... ...

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO:

[11] Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, **compruebe también que sus respuestas tienen sentido**.

[12] Este es el final del examen. Por favor, **no olvide entregar sus respuestas con su nombre, apellidos, número de DNI y dirección de correo electrónico**. Suba a la página web de la asignatura en el campus virtual de la UEx (a Actividades → Tareas → Entrega del examen para hacer en casa) un archivo *Portable Document Format* (.pdf) (`https://es.wikipedia.org/wiki/PDF`) de hasta 50 MB como máximo, o bien más de un archivo .pdf de hasta 50 MB cada uno; también es posible entregar más de uno combinados en un único archivo comprimido Zip (.zip) (https://es.wikipedia.org/wiki/Formato_de_compresión_ZIP) de hasta 50 MB.

Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Examen para hacer en casa (2020)

Tiempo máximo: **29 junio, 00:00 CEST - 12 julio, 23:59 CEST**

Máxima puntuación: **100 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

... ... **Nombre y apellidos** ... ...

DNI ... ...

... ...**@alumnos.unex.es**

RÚBRICA DE PUNTUACIÓN (Cada apartado de las cuestiones se puntuará de acuerdo con estos criterios de puntuación)

Excede con creces los estándares	90 % - 100 %	Presenta temas complejos de manera clara, concisa y creíble; prácticamente ningún error; formulación lógica; respuesta completa, profusamente referenciada, a veces utilizando estrategias propias, otras veces encontrando y mostrando diferentes estrategias alternativas de resolución o incluso planteando nuevas cuestiones de interés basadas en la cuestión abordada.
Excede los estándares	70 % - 89 %	Se comunica eficazmente en matemáticas, de forma lógica y bien ordenada; comprensión conceptual aparente; notación consistente, con sólo algún error ocasional; formulación lógica; respuesta completa o casi completa, apropiadamente referenciada.
Cumple con los estándares	50 % - 69 %	Utiliza un lenguaje matemático significativo; la comprensión conceptual es solo adecuada; hay errores matemáticos de descuido; faltan algunos pasos lógicos o relacionales; faltan algunas referencias; respuesta casi completa.
Necesita mejorar	30 % - 49 %	La comprensión conceptual no es adecuada; errores de procedimiento; faltan pasos lógicos o relacionales; faltan referencias; pobre, lejos de una respuesta completa.
Demasiado pobre	10 % - 29 %	Demasiada confusión en la comprensión conceptual; demasiados errores de procedimiento; faltan muchos pasos lógicos o relacionales; prácticamente ninguna referencia; muy pobre, muy lejos de ser una respuesta completa.
Falla	0 % - 9 %	No intenta resolver la cuestión o hay una ausencia total de comprensión conceptual.

(Vea también [2], [3], [4], [5], [6] y [7], más abajo).

POR FAVOR, AHORA LEA ESTO:

[0] Este examen no es supervisado, y usted puede acceder libremente a recursos y material de apoyo mientras lo completa.

[1] Cuando analice las cuestiones, busque las más sencillas y hágalas primero.

[2] **Sus respuestas deben reflejar** que usted se comunica en matemáticas con efectividad, de una manera lógica y bien ordenada, y presenta cuestiones complejas de una manera bien escrita, clara y organizada; además, **deben ser obligatoriamente reforzadas con referencias explícitas**, esto es, para cada definición o resultado (teorema, corolario, propiedad, lema, identidad, ...) que utilice en sus respuestas, se exige que sea identificado explícitamente y que se haga referencia directa al material o recurso específico en el que se haya encontrado, como en los libros, diapositivas, notas resumen o cualquier otro material recomendado o no (por ejemplo, libros, artículos o páginas web descubiertos por usted o por compañeros/as que le hayan ayudado [reconociendo la labor de ayuda de estas personas; léase más adelante «Su código de honor»]).

[3] No simplifique sus respuestas, exponga su trabajo en forma legible, *mostrando todos los pasos intermedios*; si usted no muestra su trabajo, si este es ilegible o si da respuestas sin justificar, no obtendrá ninguna puntuación parcial por ello; no obstante, por una respuesta incorrecta sí podría obtener una puntuación parcial siempre que sus argumentaciones o inferencias sean pertinentes, claras y lógicamente válidas. **Su proceso de pensamiento es la mejor indicación de su comprensión, por lo tanto trate de reflejarlo en sus respuestas, con el mayor detalle**.

[4] Por favor, identifique o defina, cualesquiera variables y notación que emplee en su trabajo; explique también cómo resuelve cada cuestión a la par que lo hace, por ejemplo, *enunciando claramente cualquier teorema o resultado que use*; la claridad, la limpieza y la organización son imprescindibles.

[5] **Puntuaré muy positivamente extender las respuestas**, siendo esto algo muy personal, según el conocimiento que se tenga de los diferentes contenidos tratados en la asignatura —por ejemplo, encontrando diferentes estrategias alternativas de resolución, planteando nuevas preguntas de interés basadas en las cuestiones del examen, etcétera—. Como esto realmente excede los estándares, está principalmente pensado para aquellas personas que persigan las más altas calificaciones.

[6] **Su código de honor**: Se espera que usted mantenga el más alto nivel de integridad académica, con un comportamiento honesto y ético en todo momento. Usted es libre de colaborar con sus compañeras/os de asignatura mientras completan el examen, sin embargo: 1.º, si le han ayudado, **debe reconocer a aquellas personas que le ayudaron y su trabajo** (por ejemplo, «i) Xe@ me ha ayudado con la cuestión X, sobre los asuntos i1, i2, ..., exactamente en los siguientes puntos: ...; ii) @Xe me ha ayudado con la cuestión Y, sobre los asuntos...»), y 2.º, **todo el trabajo que entregue debe ser suyo**: a usted le está permitido discutir con sus compañeras/os de asignatura sobre las preguntas del examen, pero **debe escribir sus respuestas por su cuenta, usando sus propias palabras**. **Ayudar es aceptable; la copia, el engaño, el plagio y otras formas de deshonestidad académica son inaceptables y no serán toleradas**. En particular, está estrictamente prohibido compartir el contenido de sus respuestas con sus compañeros/as. En otras palabras, mientras que su ayuda a los demás es bienvenida, debe mantener el contenido de su examen confidencial. **La evidencia indudable de copia, engaño, plagio o cualquier otra deshonestidad académica implica que las personas involucradas recibirán una calificación final de 0 en la asignatura**.

[7] **Podría escribir sus respuestas en formato LaTeX u OpenDocument** (se le proporcionan sendas plantillas) utilizando las facilidades correspondientes de composición de lenguaje matemático, **o a mano, con letra muy clara**; en cualquier caso, **debe usar la notación matemática estándar**. La entrega de las respuestas se hará en el campus virtual de la UEx en **un único archivo en formato PDF** (vea [12], al final del examen).

[8] Usted es libre de entregar su hoja de respuestas; si no la entrega, su calificación será «No presentado».

[9] Dudas durante el examen: No proporcionaré ninguna ayuda para resolver las cuestiones durante las dos semanas de realización del examen; solo responderé a las preguntas del tipo que hubiese respondido durante el examen final presencial.

[10] Usted ha resuelto previamente cuestiones similares. Confío en que sus esfuerzos den fruto. ¡Tenga éxito!

PARTE 1: **Fundamentos y Teoría de números.**

1.ª cuestión (44 ptos.)

a) Sea $\mathcal{A}$ el siguiente argumento:

> «Todos hacen lo que tú dices o lo que yo digo, aunque algunos de los tramposos no hacen lo que tú dices. Sin embargo, los que hacen lo que tú dices y los robots, hacen lo que yo digo y, además, nadie de los tramposos deja nunca de hacer lo que yo digo. En fin, que no todos los que hacen lo que tú dices, hacen lo que yo digo».

Haga lo siguiente:

a.1) Formalice este argumento $\mathcal{A}$ en lógica proposicional, plasmando minuciosamente la estructura interna de cada enunciado que se formaliza, desglosando cada uno de estos en proposiciones simples y reflejando la interacción entre todas estas últimas. (Indicación: Las discusiones de las formalizaciones podrían basarse en la teoría de conjuntos). (11 ptos.)

a.2) Demuestre, como mínimo con dos procedimientos de la lógica proposicional, que $\mathcal{A}$ no es un argumento válido. (5 ptos.)

a.3) Para cada uno de los dos procedimientos que ha usado en el apartado a.2,

a.3.1) halle los contramodelos que proporciona, (2 ptos.)

a.3.2) demuestre que efectivamente son contramodelos, (2 ptos.)

a.3.3) exprese en español los contraargumentos proporcionados por tales contramodelos que permiten refutar el argumento $\mathcal{A}$. (2 ptos.)

b) Sea $\mathbb{B}$ el conjunto de todos los octetos. Sean $+$ y $\cdot$ la suma y el producto habitual en $\mathbb{Z}$ (el conjunto de los enteros). En $\mathbb{B}$ se consideran las operaciones $\boxplus$ y $\boxdot$, definidas, $\forall x_1x_2..x_8,\ y_1y_2..y_8 \in \mathbb{B}$, por
$x_1x_2..x_8 \boxplus y_1y_2..y_8$ es el octeto cuyos bits son (x_1+y_1) mód 2, (x_2+y_2) mód 2, ..., (x_8+y_8) mód 2, por ejemplo, $10110111 \boxplus 11011101 = 01101010$, y
$x_1x_2..x_8 \boxdot y_1y_2..y_8$ es el octeto cuyos bits son $(x_1 \cdot y_1)$ mód 2, $(x_2 \cdot y_2)$ mód 2, ..., $(x_8 \cdot y_8)$ mód 2, por ejemplo, $10110111 \boxdot 11011101 = 10010101$.
Demostrando cada una de las propiedades que correspondan, averigüe todo lo que pueda sobre la estructura algebraica de

b.1) $(\mathbb{B}; \boxplus)$;

b.2) $(\mathbb{B}; \boxdot)$;

b.3) $(\mathbb{B}; \boxplus, \boxdot)$.

(7,33 ptos. en cada uno de los tres casos).

Nota: Como de costumbre, x mód y denota el resto de la división con cociente entero de x por y.

2.ª cuestión (22 ptos.)

a) En base diez, ¿cuáles son todos los números naturales $100\,000 \leqslant n \leqslant 999\,999$ que tienen la propiedad de ser iguales a las últimas cifras de su cuadrado (esto es, los números $n = ab..c \in [100\,000, 999\,999] \cap \mathbb{N}$ tales que $n^2 = xy..zab..c$)? (Un ejemplo entre 10 y 99 es $n = 5$ ya que $n^2 = 25$). (11 ptos.)
⚠ Para resolver este apartado, se exige que usted utilice el algoritmo de la división, la teoría de congruencias, la teoría de las ecuaciones diofánticas o la teoría de divisibilidad en general (la «o» es inclusiva). Si usa un criterio de divisibilidad, debe demostrarlo. —No es válida una resolución mediante un programa informático (este solo prodría servir para comprobar si la solución proporcionada por la resolución es correcta).

b) En Terrapaz las disputas se deciden jugando. Las personas terrapacenses se rigen por un sistema de puntos, atendiendo a su comportamiento social. Tres terrapacenses en disputa, deciden jugar varias partidas de un juego. Cada una de estas personas emplea una determinada cantidad de su total de puntos para jugar. Convienen en que la que pierda una partida, dobla los puntos de las otras dos. Al cabo de tres partidas, de las que perdió una cada persona, se dieron cuenta de que cada una tenía exactamente 8 puntos y acordaron darse por satisfechas, por lo que finalizaron el juego y zanjaron la disputa. ¿Cuántos puntos destinó cada una de las tres personas inicialmente al juego? (11 ptos.)
⚠ Para resolver este apartado, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas.

PARTE 2: **Combinatoria y Ecuaciones en diferencias.**

3.ª cuestión (17 ptos.)

a) De una colección de computadores (distinguibles), son 46 los que han superado tres pruebas de rendimiento que se aprueban con calificaciones A, B o C. Demuéstrese que al menos 5 de esos 46 computadores han obtenido el mismo conjunto de calificaciones. (8,5 ptos.)
⚠ Para resolver este apartado, se exige que usted utilice la teoría combinatoria. No se aceptará una resolución enumerativa (ni a mano ni por computador).

b) Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Piénsese en k objetos distinguibles en una disposición ordenada determinada $D_k = (o_1, o_2, \ldots, o_k)$. ¿Cuántas permutaciones de estos k objetos no contienen pares de objetos que fuesen consecutivos en D_k? (Por ejemplo, si $k = 4$, $D_4 = (o_1, o_2, o_3, o_4)$, y entonces, (o_2, o_4, o_1, o_3) sería una permutación con tal propiedad). —Observe que dado $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, (o_i, o_{i+1}) y (o_{i+1}, o_i) son pares distintos de objetos consecutivos en D_k. (8,5 ptos.)

Nota: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

4.ª cuestión (17 ptos.)

Sean $k, n \in \mathbb{Z}^+$. Dada la disposición ordenada original $D_k = (o_1, o_2, \ldots, o_k)$ de k objetos distinguibles, diremos que una permutación σ (*sigma*) de dichos objetos es una *permutación cercana de D_k de grado n*, si todo objeto en σ está a menos de n posiciones de su posición original en D_k y diremos que una permutación σ de dichos objetos es una *permutación lejana de D_k de grado n* si todo objeto en σ está a más de n posiciones de su posición original en D_k. Por ejemplo, si $k = 6$, $n = 2$ y $D_6 = (o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6)$, entonces, $(o_2, o_1, o_4, o_3, o_6, o_5)$ es una permutación cercana de D_6 de grado 2 y $(o_4, o_5, o_6, o_1, o_2, o_3)$ es una permutación lejana de D_6 de grado 2.

Aquí se pide:

a) Si c_k representa el número de permutaciones cercanas de D_k de grado 2, halle una ecuación en diferencias para c_k y encuentre finalmente una expresión explícita (fórmula cerrada) tan simple como sea posible para c_k. (8,5 ptos.)

b) Si l_k representa el número de permutaciones lejanas de D_k de grado 2, halle una ecuación en diferencias para l_k y encuentre finalmente una expresión explícita (fórmula cerrada) tan simple como sea posible para l_k. (8,5 ptos.)

Nota: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

PARTE 3: Autoevaluación y reflexión.
Importante: Responder a las cuestiones 5 y 6 de una manera sensata y razonable es obligatorio para que el examen sea calificado.

5.ª cuestión (Autoevaluación)

Escriba su autoevaluación de su trabajo durante el curso.

6.ª cuestión (Reflexión)

Escriba una reflexión sobre los problemas encontrados en el examen con respecto a la resolución de las cuatro cuestiones principales.

POR FAVOR, LEA ESTO LO ÚLTIMO:

[11] Cuando haya terminado de responder a las cuestiones, quizás quiera volver a verlas para asegurarse de que no ha olvidado ninguna y también las respuestas para asegurarse de que no ha omitido nada que quisiera decir. Por favor, **compruebe también que sus respuestas tienen sentido**.

[12] Este es el final del examen. Por favor, **no olvide entregar sus respuestas con su nombre, apellidos, número de DNI y dirección de correo electrónico**. Suba a la página web de la asignatura en el campus virtual de la UEx (a Actividades → Tareas → Entrega del examen para hacer en casa (julio 2020)) **un único archivo *Portable Document Format*** (.pdf) (`https://es.wikipedia.org/wiki/PDF`) **de hasta 50 MB** y **de no más de 23 páginas (incluidas las referencias explícitas)** —tanto a mano como con procesador de textos (escrito en lwona con un tamaño de 12 puntos)—, con este nombre de documento:

Apellido1Apellido2Nombre.2020.07.14.AmpMat.ExHacCasa.Hojaderespuestas.pdf

donde debe sustituir apropiadamente por su nombre y apellidos.

Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Examen final ordinario (4.6.2021) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Apellidos y nombre: … **DNI** … … … … … … … … …

¿Entrega hojas de respuestas?

—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas

—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque 1		Bloque 2		Bloque 3		Bloque 4		Bloque 5	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder únicamente a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido.

Bloque 1: lógica; conjuntos; funciones y aplicaciones

1.ª cuestión

Considere el siguiente argumento (llamémosle $\mathcal{A}$):

> «Dos personas no se pelean si una no quiere. De hecho, se pelean sólo si una tercera persona interviene. Por tanto, dos personas no se pelean a menos que las dos quieran o una tercera persona intervenga».

a) Razone si $\mathcal{A}$ es un argumento válido o no y formalice $\mathcal{A}$ en lógica proposicional. (0,5 ptos.)

b) Demuestre utilizando tablas semánticas lo que ha razonado en el apartado a) sobre $\mathcal{A}$. (1,5 ptos.)

2.ª cuestión

Siendo A, B y C tres conjuntos y designando por $\cap$, $\setminus$ y $\triangle$ la intersección, la diferencia y la diferencia simétrica de conjuntos, respectivamente, entonces, utilizando teoría de conjuntos,

a) refute la afirmación $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$; (1 pto.)

b) demuestre la afirmación $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$; (0, 5 ptos.)

c) utilice b) para demostrar la afirmación $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$. (0, 5 ptos.)

Bloque 2: relaciones; inducción; estructuras algebraicas

3.ª cuestión

⚠ Se exige que usted razone todas sus respuestas. Recuerde que una relación diádica también se conoce como relación diargumental o binaria.

a) Escriba todas las relaciones diádicas que pueden definirse en el conjunto $\{0, 1\}$; (0,4 ptos.)

b) De todas las relaciones diádicas que pueden definirse en $\{0, 1\}$:

- b.1) ¿cuáles son de orden?; (0,4 ptos.)
- b.2) ¿cuáles son de orden total?; (0,4 ptos.)
- b.3) ¿cuáles son de equivalencia?; (0,4 ptos.)
- b.4) para las que sean de equivalencia, ¿cuáles son sus clases de equivalencia y sus conjuntos cocientes? (0,4 ptos.)

4.ª cuestión

• Sean $(G; *)$ un grupo abeliano y c un elemento dado (concreto, «fijo») de G distinto del neutro. Se define una segunda ley de composición diádica (diargumental/binaria) $\circledast$ en G de la siguiente forma:

$$(\forall x, y \in G)\,(x \circledast y = x * y * c)$$

Demuestre que $(G; \circledast)$ es un grupo abeliano. (2 ptos.)

Bloque 3: teoría de números

5.ª cuestión

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted:
- I) utilice el algoritmo de la división, la teoría de congruencias o la teoría de divisibilidad en general;
- II) además, si utiliza un criterio de divisibilidad, debe demostrarlo.

[a] Demuestre que el producto de tres números naturales pares es múltiplo de 48. (1 pto.)

[b] Demuestre que si n es un número natural par, entonces 48 es divisor de $n(n^2 + 20)$. (1 pto.)

6.ª cuestión

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para:
- I) proponer, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta en la cuestión en estudio y demostrar que tiene al menos una solución; (0,5 ptos.)
- II) calcular una solución particular de ella; (0,5 ptos.)
- III) calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,5 ptos.)
- IV) calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,5 ptos.)

[•] Se sabe que un texto sólo tiene palabras de una, dos o tres letras. Entonces, si el texto constase de 6 palabras y 11 letras, ¿cuántas palabras de cada tipo tendría?

Bloque 4: combinatoria

⚠ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted:
- I) calcule lo que se pide razonando según alguna de las cuatro modelizaciones combinatorias (selección, distribución, partición, descomposición aditiva) estudiadas en la asignatura; (1 pto.)
- II) interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1 pto.)

▷ **Importante**: En cada modelización que considere, es imprescindible que identifique con total claridad cómo está representado cada emparejamiento (cuestión 7.ª) y cada reparto (cuestión 8.ª).

7.ª cuestión

[•] Se dispone de dos listas de n personas cada una. ¿De cuántas formas pueden emparejarse todas las personas de la primera lista con todas las de la segunda?

8.ª cuestión

[•] Una ONG recibe una donación de 393 sacos idénticos de arroz. Dicha ONG decide repartirlos entre sus 7 escuelas y 3 hospitales asegurando que cada escuela reciba al menos 30 sacos y que cada hospital reciba al menos 60 sacos. ¿De cuántas formas puede la ONG repartir todos los sacos?

Bloque 5: ecuaciones en diferencias

⚠ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para:
- I) proponer, razonando su porqué, un problema de valores iniciales de ecuaciones en diferencias que modelice la situación expuesta en la cuestión en estudio y demostrar que tiene solución única; (0,5 ptos.)
- II) deducir formalmente dicha solución única en forma explícita y demostrar que efectivamente lo es. (1, 5 ptos.)

9.ª cuestión

[•] Calcule cuántas cadenas ternarias (base 3) de longitud n no tienen dos cifras consecutivas iguales.

10.ª cuestión

[•] (*Mini-Tetris*). Calcule cuántas maneras existen de llenar completamente, sin solapamientos, un rectángulo $2 \times n$ con piezas rectangulares 1×2 y cuadradas 2×2 pudiendo las piezas rotar ángulos que sean múltiplos de un ángulo recto.

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Examen final extraordinario (7.7.2021) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque 1		Bloque 2		Bloque 3		Bloque 4		Bloque 5	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder únicamente a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido.

Bloque 1: lógica; conjuntos; funciones y aplicaciones

1.ª cuestión

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted formalice la situación en lógica proposicional y llegue a una conclusión utilizando el método que usted prefiera: tablas de verdad, equivalencias lógicas, derivación formal, formas normales, dualidad, tablas semánticas, etc.

- [•] En una isla todas las personas que la habitan son, o bien veraces (siempre dicen la verdad), o bien falaces (siempre mienten). Usted se encuentra con dos habitantes de dicha isla, A y B, que le dicen:
  A: Como mucho una de nosotras dos es una persona falaz si, y sólo si, yo soy una persona falaz.
  B: Exactamente una de nosotras es una persona falaz.
  ¿Es A una persona veraz o falaz? ¿Y B?

2.ª cuestión

- [•] Siendo A, B y C tres conjuntos cualesquiera y designando por $\cup$, $\setminus$ y $=$, la unión, diferencia e igualdad de conjuntos, respectivamente, entonces, utilizando teoría de conjuntos,
  - [a] demuestre o refute la afirmación $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; (1 pto.)
  - [b] demuestre o refute la afirmación $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$. (1 pto.)

Bloque 2: relaciones; inducción; estructuras algebraicas

3.ª cuestión

⚠ Recuerde, es imprescindible que usted razone todas sus respuestas.

- [•] Si sólo se dispone de sellos de 3 céntimos y de 7 céntimos, es posible formar cualquier franqueo de 12 o más céntimos. Se exige que usted demuestre esta afirmación:
  - [a] por inducción débil; (1 pto.)
  - [b] por inducción fuerte. (1 pto.)

4.ª cuestión

- [•] En el conjunto $2\mathbb{Z}$ de los números enteros pares se define, $\forall 2m, 2n \in 2\mathbb{Z}$, la ley de composición, $2m * 2n = 2m + 2n + 2mn$, siendo la suma y la multiplicación las habituales entre enteros (observe que cualquier número de $2\mathbb{Z}$, por ser par, puede escribirse como $2k$, para un cierto entero k —p. ej., escribimos $2 \cdot 5 \in 2\mathbb{Z}$ en vez de $10 \in 2\mathbb{Z}$—). Demuestre que:
  - [a] $(2\mathbb{Z}; *)$ es un monoide abeliano; (1,6 ptos.)
  - [b] $(2\mathbb{Z}; *)$ no es un grupo. (0,4 ptos.)

Bloque 3: teoría de números

5.ª cuestión

⚠ Para resolver ambos apartados de esta cuestión, se exige que usted:
- I) utilice el algoritmo de la división, la teoría de congruencias o la teoría de divisibilidad en general;
- II) además, si utiliza un criterio de divisibilidad, debe demostrarlo.

• [a] En el sistema de numeración decimal (base 10), demuestre que si n es un número natural, entonces el resto de dividir 2^{3n} por 7 es 1. (1 pto.)

[b] Usando el criterio general de divisibilidad, halle un criterio de divisibilidad por 7 en el sistema de numeración duodecimal (base 12). (1 pto.)

6.ª cuestión

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted:
- I) proponga, razonando su porqué (puede ayudar el algoritmo de la división), una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta en la cuestión en estudio y demuestre que tiene al menos una solución; (0,5 ptos.)

utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para:
- II) calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,5 ptos.)
- III) calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,5 ptos.)
- IV) calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,5 ptos.)

• ¿Cuáles son los números enteros positivos, múltiplos de 3, terminados en 5 y menores que 100?

Bloque 4: combinatoria

7.ª cuestión

⚠ Para resolver esta cuestión se exige que usted:
- I) calcule lo que se pide razonando según alguna de las cuatro modelizaciones combinatorias (selección, distribución, partición, descomposición aditiva) estudiadas en la asignatura; (1 pto.)
- II) interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1 pto.)
- ▷ **Importante**: En cada modelización que considere, es imprescindible que identifique con total claridad cómo está representado cada reparto.

• En una prueba de rendimiento, ¿de cuántas formas pueden repartirse tres tareas idénticas entre siete computadores si cualquiera de ellos puede recibir cualquier número de tareas?

8.ª cuestión

⚠ Para resolver esta cuestión sólo se exige que usted utilice razonadamente algún conocimiento de combinatoria.

• Una ONG ha preparado tres tipos de obsequios para sus n personas físicas donantes. Si tiene un número suficiente de cada tipo y quiere enviar uno o más obsequios a cada una pero no quiere que ninguna reciba dos obsequios del mismo tipo, entonces, ¿de cuántas formas puede la ONG enviar los obsequios?

Bloque 5: ecuaciones en diferencias

⚠ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para:
- I) proponer, razonando su porqué, un problema de valores iniciales de ecuaciones en diferencias que modelice la situación expuesta en la cuestión en estudio y demostrar que tiene solución única; (0,5 ptos.)
- II) deducir formalmente dicha solución única en forma explícita y demostrar que efectivamente lo es. (1, 5 ptos.)

9.ª cuestión

• Siendo n un número natural, calcule el número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no contienen números consecutivos.

10.ª cuestión

• Una granja de cómputo dispone de tres tipos de computadores. Alquilar 1 minuto de cómputo de un computador del primer tipo cuesta 1 euro; alquilarlo de un computador del segundo o tercer tipo cuesta 2 euros. ¿De cuántas formas pueden gastarse n euros en alquilar minutos de cómputo en esta granja?

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Departamento de Matemáticas

Profesor: Juan Miguel León Rojas

Examen final extraordinario (17.1.2022) — **Hoja de enunciados**
Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Apellidos y nombre: ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque 1		Bloque 2		Bloque 3		Bloque 4		Bloque 5	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder únicamente a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido.

Bloque 1: lógica; conjuntos; funciones y aplicaciones

1.ª cuestión

Considere el siguiente argumento (llamémosle $\mathcal{A}$):

> «Ningún equipo que participa es capaz nunca de entrenar durante tres meses. Ningún equipo que participa está seguro de estar bien preparado a menos que sea capaz de entrenar durante tres meses. Por tanto, si es un equipo que participa, entonces ni está seguro de su buena preparación ni es capaz de entrenar durante tres meses».

a) Razone si $\mathcal{A}$ es un argumento válido o no y formalice $\mathcal{A}$ en lógica proposicional. (0,5 ptos.)

b) Demuestre utilizando tablas semánticas lo que ha razonado en el apartado a) sobre $\mathcal{A}$. (1,5 ptos.)

2.ª cuestión

Siendo A, B y C tres conjuntos y designando por $\cap$, $\setminus$ y $\subseteq$ la unión, diferencia e inclusión de conjuntos, respectivamente, entonces, utilizando teoría de conjuntos,

a) refute la afirmación: si $A = B \setminus C$, entonces $B = A \cup C$; (1 pto.)

b) demuestre la afirmación: si $X \subseteq A \cup B$, entonces $X \setminus A \subseteq B$. (1 pto.)

Bloque 2: relaciones; inducción; estructuras algebraicas

3.ª cuestión

⚠ Se exige que usted razone todas sus respuestas.

Consideremos la relación R definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por, $\forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{Z}$,

$$x + u = y + v.$$

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (1 pto.)

b) Determine el conjunto cociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / R$ (0,5 ptos.) y represéntelo gráficamente (0,5 ptos.)

4.ª cuestión

- Sea el conjunto $\{0, 2, 4\}$ y la operación $x +_6 y = (x + y) \mod 6$ donde $+$ es la suma habitual entre enteros y $a \mod b$ es el resto de la división de a por b. Demuestre que $(\{0, 2, 4\}; +_6)$ tiene estructura de grupo abeliano. (2 ptos.)

Bloque 3: teoría de números

5.ª cuestión

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted:
- I) utilice el algoritmo de la división, la teoría de congruencias o la teoría de divisibilidad en general;
- II) además, si utiliza un criterio de divisibilidad, debe demostrarlo.

a Demuestre que $16! + 23^{16}$ es divisible por 17. (1 pto.)

b ¿Cuáles son los $n \in \mathbb{Z}$, múltiplos de 5 cuyo resto al dividirlos por 7 es 1? Exprese la respuesta en función de un parámetro, $n = f(t), \forall t \in \mathbb{Z}$ (así, por ejemplo, ..., $f(-1) = -20$, $f(0) = 15$, $f(1) = 50$, ...). (1 pto.)

6.ª cuestión

⚠ Para resolver esta cuestión,
- I) proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta en la cuestión en estudio y demuestre que tiene al menos una solución; (0,5 ptos.)

ahora, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para:
- II) calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,5 ptos.)
- III) calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,5 ptos.)
- IV) calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,5 ptos.)

• Una distribuidora hizo un pedido indefinido de un superventas a una editorial, solicitó «entre 7000 y 8000 ejemplares». La editorial se los envió en embalajes con 70 ejemplares cada uno. La distribuidora los repartió a las librerías en cajas con 23 ejemplares cada una, quedando en existencia (sin repartir) 33 ejemplares. ¿Cuál fue el número de ejemplares que la editorial envió a la distribuidora?

Bloque 4: combinatoria

⚠ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted:
- I) calcule lo que se pide razonando según alguna de las cuatro modelizaciones combinatorias (selección, distribución, partición, descomposición aditiva) estudiadas en la asignatura; (1 pto.)
- II) interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1 pto.)

▷ **Importante**: En cada modelización que considere, es imprescindible que identifique con total claridad cómo está representada cada adjudicación (cuestión 7.ª) y cada reparto (cuestión 8.ª).

7.ª cuestión

• Como premio al esfuerzo por resolver el «problema de la semana», se decidió regalar exactamente siete libros a las personas más animosas, que resultaron ser tres. ¿De cuántas formas pudieron adjudicarse los libros si se resolvió que cada persona debía recibir al menos dos libros?

8.ª cuestión

• Una ONG repartió 32 contenedores similares con paquetes de alimentos entre cinco poblados de forma que los dos más grandes recibieron, entre los dos, 23 contenedores. ¿De cuántas formas pudo hacerse?

Bloque 5: ecuaciones en diferencias

⚠ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para:
- I) proponer, razonando su porqué, un problema de valores iniciales de ecuaciones en diferencias que modelice la situación expuesta en la cuestión en estudio y demostrar que tiene solución única; (0,5 ptos.)
- II) deducir formalmente dicha solución única en forma explícita y demostrar que efectivamente lo es. (1, 5 ptos.)

9.ª cuestión

• ¿Cuántas banderas de n franjas horizontales hay si cada franja puede colorearse con un único color de tres disponibles y no pueden ser del mismo color ni dos franjas contiguas ni las franjas primera y última? (Se recomienda comprobar el resultado para banderas de hasta cuatro franjas).

10.ª cuestión

• Se lanza n veces una moneda al aire, ¿en cuántos resultados posibles (sucesos elementales) no aparecen dos caras consecutivas? —Por ejemplo, si $n = 2$, son tres: $\langle$cara, cruz$\rangle$, $\langle$cruz, cara$\rangle$, $\langle$cruz, cruz$\rangle$.

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado», en actas). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Departamento
de Matemáticas

Primer examen preparatorio (05.04.2022) — **Hoja de enunciados**
Tiempo máximo: ~~2 h 30 min~~ **1 h 30 min** — Máxima puntuación: ~~10 ptos.~~ **6 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Apellidos y nombre: ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque 1		Bloque 2		Bloque 3		Bloque 4		Bloque 5	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª
						×		×	

Debe responder únicamente a ~~5~~ 3 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2 puntos. Caso de que responda más de ~~5~~ 3 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las ~~cinco~~ tres primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola.
Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido.

Bloque 1: lógica; conjuntos; funciones y aplicaciones

1.ª cuestión

Considere el siguiente argumento (llamémosle $\mathcal{A}$):

> «Ningún equipo que participa es capaz nunca de entrenar durante tres meses. Ningún equipo que participa está seguro de estar bien preparado a menos que sea capaz de entrenar durante tres meses. Por tanto, si es un equipo que participa, entonces ni está seguro de su buena preparación ni es capaz de entrenar durante tres meses».

a) Razone si $\mathcal{A}$ es un argumento válido o no y formalice $\mathcal{A}$ en lógica proposicional. (0,5 ptos.)
b) Demuestre utilizando tablas semánticas lo que ha razonado en el apartado a) sobre $\mathcal{A}$. (1,5 ptos.)

2.ª cuestión

Siendo A, B y C tres conjuntos y designando por $\cap$, $\setminus$ y $\subseteq$ la unión, diferencia e inclusión de conjuntos, respectivamente, entonces, utilizando teoría de conjuntos,

a) refute la afirmación: si $A = B \setminus C$, entonces $B = A \cup C$; (1 pto.)
b) demuestre la afirmación: si $X \subseteq A \cup B$, entonces $X \setminus A \subseteq B$. (1 pto.)

Bloque 2: relaciones; inducción; estructuras algebraicas

3.ª cuestión

☙ Se exige que usted razone todas sus respuestas.

Consideremos la relación R definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por, $\forall \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\langle x, y \rangle \, R \, \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x + v = y + u.$$

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (1 pto.)
b) Determine el conjunto cociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / R$ (0,5 ptos.) y represéntelo gráficamente (0,5 ptos.)

4.ª cuestión

● Sea el conjunto $\{0, 2, 4\}$ y la operación $x +_6 y = (x + y) \mod 6$ donde $+$ es la suma habitual entre enteros y $a \mod b$ es el resto de la división de a por b. Demuestre que $(\{0, 2, 4\}; +_6)$ tiene estructura de grupo abeliano. (2 ptos.)

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

Bloque 3: teoría de números

5.ª cuestión

❦ Para resolver esta cuestión, se exige que usted:
i) utilice el algoritmo de la división, la teoría de congruencias o la teoría de divisibilidad en general;
ii) además, si utiliza un criterio de divisibilidad, debe demostrarlo.

a Demuestre que $16! + 23^{16}$ es divisible por 17. (1 pto.)

b ¿Cuáles son los $n \in \mathbb{Z}$, múltiplos de 5 cuyo resto al dividirlos por 7 es 1? Exprese la respuesta en función de un parámetro, $n = f(t), \forall t \in \mathbb{Z}$ (así, por ejemplo, ..., $f(-1) = -20$, $f(0) = 15$, $f(1) = 50$, ...). (1 pto.)

6.ª cuestión

❦ Para resolver esta cuestión,
i) proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta en la cuestión en estudio y demuestre que tiene al menos una solución; (0,5 ptos.)
ahora, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para:
ii) calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,5 ptos.)
iii) calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,5 ptos.)
iv) calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,5 ptos.)

• Una distribuidora hizo un pedido indefinido de un superventas a una editorial, solicitó «entre 7000 y 8000 ejemplares». La editorial se los envió en embalajes con 70 ejemplares cada uno. La distribuidora los repartió a las librerías en cajas con 23 ejemplares cada una, quedando en existencia (sin repartir) 33 ejemplares. ¿Cuál fue el número de ejemplares que la editorial envió a la distribuidora?

Bloque 4: combinatoria

❦ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted:

7.ª cuestión

• ...

8.ª cuestión

• ...

Bloque 5: ecuaciones en diferencias

❦ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para:

9.ª cuestión

• ...

10.ª cuestión

• ...

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado», en actas). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

©2025, Juan Miguel León Rojas; metaLicencia Gratuidad Cristiana (CGL 10.30) <http://gratuidadcristiana.blogspot.com/>.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Examen final ordinario (20.5.2022) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **12,5 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque 1		Bloque 2		Bloque 3		Bloque 4		Bloque 5 (opt.)	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder como máximo a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2,5 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido. El bloque 5 es optativo; con los 4 primeros bloques es posible obtener una calificación de 10 en la asignatura. Sin embargo, la resolución de una cuestión de este bloque optativo podría ayudarle a mejorar su calificación. El examen se aprueba con una calificación mínima de 5 puntos. Observación: «combinatoria I» (bloque 4): principios fundamentales de recuento; variaciones, permutaciones y combinaciones, sin y con repetición; primera modelización combinatoria; «combinatoria II» (bloque 5): las cuatro modelizaciones combinatorias.

Bloque 1: lógica; conjuntos; funciones y aplicaciones

1.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Se exige que formalice la situación y llegue a una conclusión en lógica proposicional utilizando el método que prefiera: tablas de verdad, equivalencias lógicas, derivación formal, formas normales, dualidad, árboles semánticos, etc.

• Tras diversas consultas sesudas, el ministerio correspondiente publicó un comunicado de prensa en el que razonaron así: «Una manera de lograr que la contaminación sea aceptable es conseguir que circulen menos automóviles por las carreteras. Una manera de que circulen menos automóviles es cobrar por usar las carreteras. Si circulan menos coches por las carreteras, la temperatura atmosférica del país descenderá. Esta primavera ha hecho más frío. La conclusión es ineludible: la contaminación es aceptable». Llamemos $\mathcal{A}$ a este argumento. Pero ocurrió que un medio de comunicación publicó lo que dijo el ministerio así: «Si hay menos automóviles en las carreteras, la contaminación será aceptable. O bien tenemos menos automóviles en las carreteras, o bien se tendría que cobrar por el uso de las carreteras, o bien ambas cosas. Si se cobra por usar las carreteras, la temperatura aumentará en verano hasta un nivel insoportable. Este verano la temperatura está resultando ser bastante agradable. La conclusión es ineludible: la contaminación es aceptable». Llamemos $\mathcal{B}$ a este argumento. Se pregunta: ¿son lógicamente equivalentes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$?

2.ª cuestión (2,5 ptos.)

• Siendo A, B y C tres conjuntos cualesquiera y designando por $\cup$, $\cap$, $\setminus$,$\subseteq$ y $=$, la unión, intersección, diferencia, inclusión e igualdad de conjuntos, respectivamente, entonces, utilizando teoría de conjuntos, demuestre que las tres afirmaciones $C \subseteq A \cup B$, $C \setminus A \subseteq B$ y $(C \setminus A) \cap (C \setminus B) = \emptyset$ son equivalentes.

Bloque 2: relaciones; inducción; cardinalidad; estructuras algebraicas

3.ª cuestión (2,5 ptos.)

• Dadas dos cadenas finitas a y b de la misma longitud, la distancia de Hamming entre ellas, $d_H(a,b)$ es el número de posiciones en las que los símbolos correspondientes son diferentes. Sea C un conjunto de cadenas. Sea R la relación diádica definida en C por: $aRb \Leftrightarrow d_H(a,b) \leqslant 3$.

[a] Estudie si R satisface las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva y conexa (fuertemente completa) (0,3 ptos. c/u) y diga qué tipo de relación es y por qué lo es (0,25 ptos.);

[b] Proporcione un ejemplo de conjunto C y considerando R actuando en él, halle las clases de compatibilidad y las clases maximales de compatibilidad, las clases de equivalencia o dibuje un diagrama de Hasse, dependiendo de que R sea una relación de compatibilidad, una relación de equivalencia o una ordenación en C. (0,75 ptos.)

4.ª cuestión (2,5 ptos.)

• Si sólo se dispone de sellos de 3 céntimos y de 5 céntimos, es posible formar cualquier franqueo de 8 o más céntimos. Se exige que usted demuestre esta afirmación: [a] por inducción débil; (1,25 ptos.) [b] por inducción fuerte. (1,25 ptos.)

Bloque 3: teoría de números

5.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Para resolver ambos apartados de esta cuestión, se exige que usted:
i) utilice el algoritmo de la división, la teoría de congruencias o la teoría de divisibilidad en general;
ii) además, si utiliza un criterio de divisibilidad, debe demostrarlo.

• [a] Demuestre utilizando el algoritmo de la división que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \mathbb{Z}$. (1,25 ptos.)

[b] Calcule el resto de dividir $3^{6n+1} + 3^{2n+1} \cdot 19^{2n} - 3$ entre 28, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. (1,25 ptos.)

6.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión, i) proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta en la cuestión en estudio y demuestre que tiene al menos una solución; (0,75 ptos.); después, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para: ii) calcular una solución particular de la ecuación propuesta en i); (0,5 ptos.) iii) calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,5 ptos.) iv) calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,75 ptos.)

• Una distribuidora hizo un pedido indefinido de un superventas a una editorial, solicitó «entre 7000 y 8000 ejemplares». La editorial se los envió en embalajes con 70 ejemplares cada uno. La distribuidora los repartió a las librerías en cajas con 23 ejemplares cada una, quedando en existencia (sin repartir) 33 ejemplares. ¿Cuál fue el número de ejemplares que la editorial envió a la distribuidora?

Bloque 4: combinatoria I

7.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Para resolver ambos apartados de esta cuestión se exige que usted utilice un razonamiento combinatorio basado en lo estudiado en Combinatoria I o alguna de las cuatro modelizaciones combinatorias (selección, distribución, partición, descomposición aditiva) que usted considere compatible con la situación expuesta en el apartado en estudio.

▷ **Importante**: Es imprescindible que identifique claramente cómo está representado combinatoriamente cada reparto.

• [a] En una prueba de rendimiento, ¿de cuántas formas puede un computador central repartir cuatro tareas indistinguibles entre tres computadores auxiliares si cualquiera de estos puede recibir cualquier número de tareas? (1,25 ptos.)

[b] ¿Y si todos los computadores auxiliares deben tener una tarea asignada? (1,25 ptos.)

8.ª cuestión (2,5 ptos.)

• La cuadrícula de Manhattan consta de doce avenidas recorriendo de norte a sur la isla (Broadway es la excepción, pues la recorre en diagonal, y no hablamos de ella) —la primera avenida (1st *Avenue*) está en el extremo este de Manhattan, junto al *East River*, y la última, la doce (12th *Avenue*) está en el extremo oeste, junto al río Hudson—, cortadas en ángulos rectos por más de 210 calles, que recorren la isla de este a oeste. La numeración de las calles es de sur a norte, esto es, la primera (1st *St*) está en el sur de Manhattan —así, si al recorrer una avenida los números de las calles que cruzan crecen, es que caminamos hacia el norte—. La cuestión es, ¿cuántos caminos de longitud mínima pueden seguirse para ir del cruce de la 3.ª Avenida con la calle 23 (3rd *Avenue* 23rd *St*) hasta el cruce de la 6.ª Avenida con la calle 17 (6th *Avenue* 17th *St*)?

Bloque 5 (optativo): combinatoria II; ecuaciones en diferencias

9.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión se exige que usted: i) calcule lo que se pide razonando según una —a su elección— de las cuatro modelizaciones combinatorias (selección, distribución, partición, descomposición aditiva); (1,25 ptos.) ii) interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1,25 ptos.)

▷ **Importante**: En cada una de las modelizaciones que utilice, es imprescindible que identifique claramente cómo está representado cada reparto.

• Antes de un examen, una profesora repartió una lista con 12 posibles cuestiones. El examen constaba de 4 cuestiones de esas 12. ¿Cuántos posibles exámenes distintos existen?, esto es, ¿cuántas posibilidades existen de elegir las 4 cuestiones entre las 12?

10.ª cuestión (2,5 ptos.)

• Considere el arenero de un experimento web con una población de bots autorreplicantes malignos. Suponga que no existen factores externos que modifiquen su crecimiento. Suponga que la población crece el doble, en cada período de tiempo que transcurre entre dos medidas, de lo que creció en el período inmediatamente anterior. Calcule el número de bots en un instante arbitrario de tiempo t.

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Departamento de Matemáticas

Examen final extraordinario (22.6.2022) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **12,5 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... DNI ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque 1		Bloque 2		Bloque 3		Bloque 4		Bloque 5 (opt.)	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder como máximo a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2,5 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido. El bloque 5 es optativo; con los 4 primeros bloques es posible obtener una calificación de 10 en la asignatura. Sin embargo, la resolución de una cuestión de este bloque optativo podría ayudarle a mejorar su calificación. El examen se aprueba con una calificación mínima de 5 puntos. Observación: «combinatoria I» (bloque 4): principios fundamentales de recuento; variaciones, permutaciones y combinaciones, sin y con repetición; primera modelización combinatoria; «combinatoria II» (bloque 5): las cuatro modelizaciones combinatorias.

Bloque 1: lógica; conjuntos; funciones y aplicaciones

1.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Se exige que formalice la situación y llegue a una conclusión en lógica proposicional utilizando el/los método/s que prefiera: tablas de verdad, equivalencias lógicas, derivación formal, formas normales, dualidad, árboles semánticos, etc.

• Considere una isla donde todas las personas que la habitan son, o bien veraces, o bien falaces. Una persona veraz es aquella que siempre dice la verdad y falaz quien siempre miente. De acuerdo con este viejo problema, tres habitantes, A, B y C, estaban de pie en un jardín. Una cuarta persona, extranjera, D, que pasaba por allí le preguntó a A: «¿Es usted una persona veraz o falaz?». A respondió, pero algo confusamente, por lo que D no pudo entender lo que dijo A. Entonces, D le preguntó a B: «¿Qué dijo A?». B respondió: «A dijo que es una persona falaz». A estas alturas, C dijo: «No crea usted a B; ¡está mintiendo!». La cuestión es: ¿qué son B y C?, ¿veraces?, ¿falaces?, ¿una veraz y la otra falaz?

2.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ *Nota*. Los signos $\cup$, $\dot\cup$, $\cap$, $\setminus$, $=$, designan la unión, unión disjunta, intersección, diferencia e igualdad de conjuntos, respectivamente; 2^C designa el conjunto de todos los subconjuntos de C. *Indicación*. Para b) podría ayudarle recordar que $X = (X \setminus Y) \dot\cup (X \cap Y)$, $Y = (Y \setminus X) \dot\cup (X \cap Y)$ y $X \cup Y = X \dot\cup (Y \setminus X) = Y \dot\cup (X \setminus Y)$.

• Sea C un conjunto y $f : 2^C \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación tal que $\forall X, Y \in 2^C$, $f(X \cup Y) = f(X) + f(Y)$ si $X \cap Y = \emptyset$.

- a Demuestre que $f(\emptyset) = 0$. (1 pto.)
- b Demuestre que $\forall X, Y \in 2^C$, $f(X \cup Y) = f(X) + f(Y) - f(X \cap Y)$. (1 pto.)
- c Explique razonadamente si una correspondencia *Card* con argumento un conjunto finito y valor el cardinal de éste podría ser un caso particular de la aplicación f. (0,5 ptos.)

Bloque 2: relaciones; inducción; cardinalidad; estructuras algebraicas

3.ª cuestión (2,5 ptos.)

• Sea $(C; +)$ un monoide abeliano en el que el único elemento simetrizable es el neutro. Sea R la relación diádica definida en C por $(\forall x, y \in C)(xRy \Leftrightarrow (\exists c \in C)(x + c = y))$.

- a Estudie si R satisface las propiedades I) reflexiva, II) simétrica, III) antisimétrica, IV) transitiva y V) conexa (fuertemente completa) (0,3 ptos. c/u) y VI) ¿qué tipo de relación es?, ¿por qué? (0,25 ptos.);
- b Proporcione un ejemplo de monoide abeliano $(C; +)$ en el que el único elemento simetrizable es el neutro y considerando R actuando en él, halle las clases de compatibilidad y las clases maximales de compatibilidad, las clases de equivalencia o dibuje un diagrama de Hasse, dependiendo de que R sea una relación de compatibilidad, una relación de equivalencia o una ordenación en $(C; +)$. (0,75 ptos.)

4.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ *Nota*. Para responder a los apartados b), c) y d), puede usted razonar con la tabla hallada en a).

• Sea $\boxtimes$ la ley de composición diádica definida en $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ por $(\forall x, y \in A)(x \boxtimes y = u)$, donde u es la cifra de las unidades del producto habitual $x \times y$ entre números naturales —por ejemplo, $3 \boxtimes 9 = 7$—.

- a Halle razonadamente la tabla de Cayley de $\boxtimes$ en A. (0,2 ptos.)
- b Estudie si $(A; \boxtimes)$ tiene estructura de: I) magma, II) semigrupo, III) monoide, IV) grupo? (0,4 ptos. c/u)
- c Halle razonadamente un subconjunto S de A tal que $(S; \boxtimes)$ sea un grupo de orden cuatro. (0,2 ptos.)
- d ¿A cuál es isomorfo $(S; \boxtimes)$, al grupo cíclico C_4 o al grupo de Klein K_4? ¿Por qué? (0,5 ptos.)

Bloque 3: teoría de números

5.ª cuestión (2,5 ptos.)

- [•] En el sistema de numeración decimal —base 10—, de manera razonada,
  - [a] utilice el criterio general de divisibilidad para hallar un criterio de divisibilidad por 11; (0,5 ptos.)
  - [b] utilice el criterio general de divisibilidad para hallar un criterio de divisibilidad por 101; (0,5 ptos.)
  - [c] halle las cifras x, y para que el número $7x1y4$ sea múltiplo de 11 y de 101. (1,5 ptos.)

6.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted [I] proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta (0,5 ptos.) y demuestre que tiene al menos una solución (0,25 ptos.); después, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para: [II] calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,5 ptos.) [III] calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,5 ptos.) [IV] calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,75 ptos.)

- [•] En el sistema de numeración decimal, halle un número entero positivo n tal que la suma de sus cifras es 20 y tal que si de n se resta 205 y se divide esa diferencia por dos se obtiene como resultado el número formado por las cifras de n escritas en orden inverso.

Bloque 4: combinatoria I

7.ª cuestión (2,5 ptos.)

- [•] Utilice razonadamente el principio de la adición para calcular el número total de saludos que tienen lugar en una reunión a la que asisten n personas en la que todas se saludan entre sí una y sólo una vez.

8.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión se exige que usted utilice un razonamiento combinatorio, basado en lo estudiado en Combinatoria I o en alguna de las cuatro modelizaciones combinatorias —selección, distribución, partición, descomposición aditiva— que usted considere compatible con la situación expuesta en esta cuestión.

▷ **Importante**: Es imprescindible que identifique claramente cómo está representado combinatoriamente cada reparto.

- [•] En una prueba de rendimiento, ¿de cuántas formas puede un computador central repartir siete tareas, tres idénticas y cuatro distintas a esas tres y distintas entre sí, entre siete computadores auxiliares, si algunos de estos pueden recibir dos o más tareas diferentes y ninguno dos o más tareas idénticas?

Bloque 5 (optativo): combinatoria II; ecuaciones en diferencias

9.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión se exige que usted: [I] incluya en su razonamiento alguna —a su elección— de las cuatro modelizaciones combinatorias —selección, distribución, partición, descomposición aditiva—; (1,25 ptos.) [II] interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1,25 ptos.)

▷ **Importante**: En cada una de las modelizaciones debe identificar claramente cómo está representado cada emparejamiento.

- [•] Se dispone de dos listas de n personas cada una. ¿De cuántas formas pueden emparejarse todas las personas de la primera lista con todas las de la segunda?

10.ª cuestión (2,5 ptos.)

⚠ Se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para: [I] proponer, razonando su porqué, un problema de valores iniciales de ecuaciones en diferencias que modelice la situación expuesta en la cuestión en estudio y demostrar que tiene solución única; (0,75 ptos.) [II] deducir formalmente dicha solución única en forma explícita y demostrar que efectivamente lo es. (1,75 ptos.)

- [•] Una granja de cómputo dispone de tres tipos de computadores. Alquilar un minuto de cómputo de un computador del primer tipo cuesta un euro; alquilarlo de un computador del segundo o tercer tipo cuesta dos euros. ¿De cuántas formas pueden gastarse n euros en alquilar minutos de cómputo en esta granja?

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Departamento de Matemáticas

Examen final extraordinario (19.1.2023) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **12,5 puntos**.

Profesor: Juan Miguel León Rojas

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque 1		Bloque 2		Bloque 3		Bloque 4		Bloque 5 (opt.)	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder como máximo a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2,5 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido. El bloque 5 es optativo; con los 4 primeros bloques es posible obtener una calificación de 10 en la asignatura. Sin embargo, la resolución de una cuestión de este bloque optativo podría ayudarle a mejorar su calificación. El examen se aprueba con una calificación mínima de 5 puntos. Observación: «combinatoria I» (bloque 4): principios fundamentales de recuento; variaciones, permutaciones y combinaciones, sin y con repetición; primera modelización combinatoria; «combinatoria II» (bloque 5): las cuatro modelizaciones combinatorias.

Bloque 1: lógica; conjuntos; funciones y aplicaciones

1.ª cuestión (2,5 p.)

- «De tres jugadores, A, B y C, se sabe sólo que "C miente siempre que miente A" o que "la mentira de B siempre es seguida de la mentira de C". Por tanto, se deduce que "si A o B mienten, entonces C miente"». Haga lo siguiente:
  - a) Formalice dicho argumento en lógica proposicional. Llámelo $\mathcal{A}$. (0,25 p.)
  - b) Demuestre, mediante el método de las/os tablas/árboles semánticas/os, que $\mathcal{A}$ es un argumento válido o que no lo es. (1,5 p.)
  - c) Caso de que $\mathcal{A}$ sea válido, modifique la hipótesis o la tesis para que el argumento modificado no sea válido y justifique que así es. Caso de que $\mathcal{A}$ no sea válido, identifique el/los modelo/s que proporciona/n la/s rama/s abierta/s y el conjunto de fórmulas bien formadas para el que lo/s proporciona/n. (0,25 p.)
  - d) Caso de que existan modelos, utilice algún método, estrategia o herramienta de la Lógica Proposicional para demostrar que lo son. (0,25 p.)
  - e) Caso de que existan modelos, exprese en español los contraargumentos —proporcionados por tales modelos— que permiten refutar el argumento $\mathcal{A}$. (0,25 p.)

2.ª cuestión (2,5 p.)

- Siendo A, B y C tres conjuntos y designando por $\cup$, $\setminus$, $\subseteq$ y $=$, la unión, diferencia, inclusión e igualdad de conjuntos, respectivamente, entonces, utilizando teoría de conjuntos,
  - a) refute la afirmación: si $A = B \setminus C$, entonces $B = A \cup C$; (1,25 p.)
  - b) demuestre la afirmación: si $X \subseteq A \cup B$, entonces $X \setminus A \subseteq B$. (1,25 p.)

Bloque 2: relaciones; inducción; cardinalidad; estructuras algebraicas

3.ª cuestión (2,5 p.)

- En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, se define la relación diádica R: $\forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.
  - a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. (1,25 p.)
  - b) Utilice la definición de clase de equivalencia para encontrar todos los números enteros pertenecientes a la clase de equivalencia de $a \in \mathbb{Z}$. (1,25 p.)

4.ª cuestión (2,5 p.)

⚠ *Nota*. Para responder a los apartados b), c) y d), puede usted razonar con la tabla hallada en a).

- Sea $\boxtimes$ la ley de composición diádica definida en $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ por $(\forall x, y \in A)(x \boxtimes y = u)$, donde u es la cifra de las unidades del producto habitual $x \times y$ entre números naturales —por ejemplo, $3 \boxtimes 9 = 7$—.
  - a) Halle razonadamente la tabla de Cayley de $\boxtimes$ en A. (0, 2 p.)
  - b) Estudie si $(A; \boxtimes)$ tiene estructura de: I) magma, II) semigrupo, III) monoide, IV) grupo. (0, 4 p. c/u)
  - c) Halle razonadamente un subconjunto S de A tal que $(S; \boxtimes)$ sea un grupo de orden cuatro. (0, 2 p.)
  - d) ¿A cuál es isomorfo $(S; \boxtimes)$, al grupo cíclico C_4 o al grupo de Klein K_4? ¿Por qué? (0, 5 p.)

Bloque 3: teoría de números

5.ª cuestión (2,5 p.)

• [a] Enuncie el criterio general de divisibilidad; (0,25 p.)
[b] utilícelo para hallar criterios de divisibilidad por 7, por 11 y por 13, en base diez; (0,416666 p. cada uno)
[c] utilice lo anterior para demostrar que, en base diez, el número natural de seis cifras $abcabc$ es divisible por 1001. (1 p.)

6.ª cuestión (2,5 p.)

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted [I] proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta (0,5 p.) y demuestre que tiene al menos una solución (0,25 p.); después, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para: [II] calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,5 p.) [III] calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,5 p.) [IV] calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,75 p.)

• Se quiere empaquetar 64 objetos para su transporte. Se dispone de 5 cajas con capacidad para 8 objetos cada una y otras 5 con capacidad doble, esto es, para 16 objetos cada una. Si no se tiene por qué utilizar todas las cajas sino maximizar el número de objetos por caja, halle de cuántas formas se puede hacer el empaquetado final y cuáles son precisamente dichas formas.

Bloque 4: combinatoria I

7.ª cuestión (2,5 p.)

• Calcule el número de subconjuntos de $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que tienen un número primo de elementos. Para ello se exige que usted:
[a] formalice la situación según el principio de la adición; (1 p.)
[b] razone de cuántas formas sucede cada uno de los sucesos intervinientes, (0,5 p.) y, finalmente,
[c] aplique el principio de la adición. (1 p.)

8.ª cuestión (2,5 p.)

⚠ Para resolver esta cuestión sólo se exige que usted utilice razonadamente algún conocimiento de combinatoria.
• Una ONG ha preparado tres tipos de obsequios para sus n personas físicas donantes. Si tiene un número suficiente de cada tipo y quiere enviar uno o más obsequios a cada una pero no quiere que ninguna reciba dos obsequios del mismo tipo, entonces, ¿de cuántas formas puede la ONG enviar los obsequios?

Bloque 5 (optativo): combinatoria II; ecuaciones en diferencias

9.ª cuestión (2,5 p.)

⚠ Para resolver esta cuestión se exige que usted: [I] incluya en su razonamiento alguna —a su elección— de las cuatro modelizaciones combinatorias —selección, distribución, partición, descomposición aditiva—; (1,25 p.) [II] interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1,25 p.)
▷ **Importante**: En cada una de las modelizaciones debe identificar claramente cómo está representado cada reparto.
• Una ONG recibe una donación de 393 sacos idénticos de arroz. Dicha ONG decide repartirlos entre sus 7 escuelas y 3 hospitales asegurando que cada escuela reciba al menos 30 sacos y que cada hospital reciba al menos 60 sacos. ¿De cuántas formas puede la ONG repartir todos los sacos?

10.ª cuestión (2,5 p.)

⚠ Se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para, en todos los casos razonando su porqué, modelizar y resolver la situación expuesta en la cuestión en estudio: [I] proponga una ecuación en diferencias (ED) (0,5 p.); [II] proponga un problema de valores iniciales (PVI) (0,15 p.); [III] demuestre que dicho PVI tiene solución única (0,1 p.); [IV] calcule las raíces características pertinentes (0,5 p.); [V] obtenga las soluciones de las ED concernientes (0,5 p.), y [VI] resuelva el mencionado PVI y, por tanto, obtenga la solución explícita de la cuestión (0,75 p.).
• Suponga que las únicas contraseñas válidas para un sistema informático son las cadenas finitas de dígitos ternarios (base 3) que contienen un número par de ceros (se permiten ceros encabezando la cadena). Se pide que usted calcule el número de contraseñas válidas de longitud n.

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Departamento de Matemáticas

Primer examen preparatorio (14.04.2023) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: ~~2 h 30 min~~ **1 h 30 min** — Máxima puntuación: ~~10 ptos.~~ **6 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque I		Bloque II		Bloque III		Bloque IV		Bloque V	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª
						—	—	—	—

Debe responder como máximo a ~~5~~ 3 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2 puntos. Caso de que responda más de ~~5~~ 3 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las ~~cinco~~ tres primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido.

Bloque I. Lógica, conjuntos y correspondencias.

1.ª cuestión (2 ptos.)

• Considere la siguiente argumentación:

«El CIA (coeficiente de inteligencia artificial) permanece constante sólo si se incrementa la creatividad humana o no emerge la consciencia artificial. La creatividad humana crece a menos que las inteligencias artificiales consigan manipular al ser humano. Si el CIA permanece constante y las inteligencias artificiales consiguen manipular al ser humano, emerge la consciencia artificial. Por lo tanto, se incrementa la creatividad humana».

a. Formalice dicha argumentación en lógica proposicional. (0,5 ptos.)

b. Demuestre utilizando tablas semánticas que dicha argumentación no es válida. (1 pto.)

c. Encuentre todos los modelos de las premisas que falsan la conclusión y elabore las contraargumentaciones correspondientes. (0,5 ptos.)

2.ª cuestión (2 ptos.)

• El desarrollo de una asignatura universitaria se organiza en dos grupos grandes de clase A y B, que son tales que ninguna persona de un grupo pertenece al otro grupo. Utilice la teoría de conjuntos para demostrar que no pueden existir personas que pertenezcan a la vez a un subgrupo del A y a un subgrupo del B, sean los subgrupos del tamaño que sean siempre que contengan como mínimo una persona.

Bloque II. Relaciones, inducción y estructuras algebraicas.

3.ª cuestión (2 ptos.)

• Sean $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y la relación R definida en A por, $\forall x, y \in A$,

$$x \, R \, y \Leftrightarrow (x = y) \vee (x + y = 2).$$

a. Defina R por extensión. (0,5 ptos.)

b. Demuestre que R es una relación de equivalencia en A. (1 pto.)

c. Halle el conjunto cociente A/R (0,5 ptos.)

4.ª cuestión (2 ptos.)

• Sean las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ definidas en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por, $\forall \langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\langle x, y\rangle \oplus \langle u, v\rangle = \langle x + u, y + v\rangle,$$
$$\langle x, y\rangle \otimes \langle u, v\rangle = \langle xu, xv + yu\rangle.$$

a. Demuestre que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; \oplus, \otimes)$ es un anillo conmutativo unitario. (1,75 ptos.)

b. ¿Es $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; \oplus, \otimes)$ un dominio de integridad? (0,25 ptos.)

Bloque III. Teoría de números.

5.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted utilice un razonamiento de teoría de números basado en lo estudiado en la asignatura (si utiliza un criterio de divisibilidad, debe demostrarlo).

- Sea una variable de tipo cadena de n bits etiquetados de 1 a n. Inicializamos dicha variable con todos los bits en estado 1. Un dispositivo puede actuar de n formas distintas en la cadena: la forma 1 cambia el estado de todos los bits; la forma 2 cambia el estado de los bits de dos en dos comenzando por el bit 2, y así sucesivamente, esto es, en general, la forma k cambia el estado de los bits de k en k comenzando por el bit k. Si dicho dispositivo ejecuta secuencialmente las formas de actuar 1, 2, ..., n, entonces:
  - a ¿qué número de veces cambia de estado el bit r?; (1 pto.)
  - b ¿qué bits quedarán en un estado distinto de su estado inicial y por qué? (1 pto.)

6.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted I proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta (0,4 ptos.) y demuestre que tiene al menos una solución (0,1 ptos.); después, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para: II calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,5 ptos.) III calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,5 ptos.) IV calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,5 ptos.)

- En un sistema informático determinado, procesar una consulta de tipo I supone un coste computacional de 700 ucb (unidades de coste de bit), una de tipo II un coste de 550 ucb y procesar una de tipo III un coste de 390 ucb. Si dicho sistema ha procesado 69 consultas con un coste computacional total de 32740 ucb, ¿cuántas consultas puede haber habido de cada tipo?

Bloque IV. Razonamiento combinatorio.

⚠ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted: ...

7.ª cuestión (2 ptos.)

- ...

8.ª cuestión (2 ptos.)

- ...

Bloque V. Combinatoria avanzada: ecuaciones en diferencias.

⚠ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para: ...

9.ª cuestión (2 ptos.)

- ...

10.ª cuestión (2 ptos.)

- ...

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Examen final ordinario (24.5.2023) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque I		Bloque II		Bloque III		Bloque IV		Bloque V	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder como máximo a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido.

Bloque I. Lógica, conjuntos y correspondencias.

1.ª cuestión (2 ptos.)

• Considere el siguiente argumento, que llamamos $\mathcal{A}$:

> De tres jugadores, A, B y C, se sabe sólo que «C miente siempre que miente A» o que «la mentira de B siempre es seguida de la mentira de C». Por lo tanto, se deduce que «si A o B mienten, entonces C miente».

a. Formalice $\mathcal{A}$ en lógica proposicional. (0,2 p.)
b. Demuestre la no validez de $\mathcal{A}$ mediante la estrategia de los árboles semánticos (tablas analíticas/semánticas) (debe anotar convenientemente el árbol y debe demostrar la satisfactibilidad o insatisfactibilidad de toda rama) (1,2 p.)
c. Identifique los modelos que proporcionan las ramas satisfactibles y el conjunto Γ de fórmulas bien formadas para el que los proporcionan. (0,2 p.)
d. Demuestre, utilizando alguna estrategia de la lógica proposicional, que dichos modelos lo son para Γ. (0,2 p.)
e. Exprese en español las contraargumentaciones proporcionadas por tales modelos que permiten refutar $\mathcal{A}$. (0,2 p.)

2.ª cuestión (2 ptos.)

• Siendo A, B y C tres conjuntos y designando por $\cup$, $\setminus$, $\subseteq$ y $=$, la unión, diferencia, inclusión e igualdad de conjuntos, respectivamente, entonces, utilizando teoría de conjuntos,

a. refute la afirmación: si $A = B \setminus C$, entonces $B = A \cup C$; (1 p.)
b. demuestre la afirmación: si $X \subseteq A \cup B$, entonces $X \setminus A \subseteq B$. (1 p.)

Bloque II. Relaciones, inducción y estructuras algebraicas.

3.ª cuestión (2 ptos.)

• En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, se define la relación diádica R: $\forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

a. Demuestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. (1 p.)
b. Utilice la definición de clase de equivalencia para encontrar todos los números enteros pertenecientes a la clase de equivalencia de $a \in \mathbb{Z}$. (1 p.)

4.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ *Nota*. Para responder a los apartados b), c) y d), puede usted razonar con la tabla hallada en a).

• Sea $\boxtimes$ la ley de composición diádica definida en $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ por $(\forall x, y \in A)(x \boxtimes y = u)$, donde u es la cifra de las unidades del producto habitual $x \times y$ entre números naturales —por ejemplo, $3 \boxtimes 9 = 7$—.

a. Halle razonadamente la tabla de Cayley de $\boxtimes$ en A. (0, 16 p.)
b. Estudie si $(A; \boxtimes)$ tiene estructura de: I) magma, II) semigrupo, III) monoide, IV) grupo. (0, 32 p. c/u)
c. Halle razonadamente un subconjunto S de A tal que $(S; \boxtimes)$ sea un grupo de orden cuatro. (0, 16 p.)
d. ¿A cuál es isomorfo $(S; \boxtimes)$, al grupo cíclico C_4 o al grupo de Klein K_4? ¿Por qué? (0, 4 p.)

Bloque III. Teoría de números.

5.ª cuestión (2 ptos.)

- [a] Enuncie el criterio general de divisibilidad; (0,2 p.)
- [b] utilícelo para hallar criterios de divisibilidad por 7, por 11 y por 13, en base diez; (0,333333 p. cada uno)
- [c] utilice lo anterior para demostrar que, en base diez, el número natural de seis cifras $abcabc$ es divisible por 1001. (0,8 p.)

6.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted [I] proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta (0,4 p.) y [II] demuestre que tiene al menos una solución; (0,2 p.) después, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para: [III] calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,4 p.) [IV] calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,4 p.) [V] calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,6 p.)

- Se quiere empaquetar 64 objetos para su transporte. Se dispone de 5 cajas con capacidad para 8 objetos cada una y otras 5 con capacidad doble, esto es, para 16 objetos cada una. Si no se tiene por qué utilizar todas las cajas sino maximizar el número de objetos por caja, halle de cuántas formas se puede hacer el empaquetado final y cuáles son precisamente dichas formas.

Bloque IV. Razonamiento combinatorio.

7.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión se exige que usted incluya en su razonamiento el principio de la adición.

- Sean X e Y dos conjuntos finitos no vacíos de cardinales respectivos x e y. ¿Cuántas correspondencias existen de X a Y?

8.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión se exige que usted: [I] incluya en su razonamiento alguna —a su elección— de las cuatro modelizaciones combinatorias —selección, distribución, partición, descomposición aditiva—; (1 p.) [II] interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1 p.)

▷ **Importante**: En cada una de las modelizaciones debe identificar claramente cómo está representado cada reparto.

- Una ONG recibe una donación de 393 sacos idénticos de arroz. Dicha ONG decide repartirlos entre sus 7 escuelas y 3 hospitales asegurando que cada escuela reciba al menos 30 sacos y que cada hospital reciba al menos 60 sacos. ¿De cuántas formas puede la ONG repartir todos los sacos?

Bloque V. Ecuaciones en diferencias.

⚠ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para, en todos los casos razonando su porqué, modelizar y resolver la situación expuesta en la cuestión en estudio: [I] proponga una ecuación en diferencias (ED) o más (0,4 p.); [II] proponga un problema de valores iniciales (PVI) (0,12 p.); [III] demuestre que dicho PVI tiene solución única (0,08 p.); [IV] calcule las raíces características pertinentes (0,4 p.); [V] obtenga las soluciones de las ED concernientes (0,4 p.), y [VI] resuelva el mencionado PVI y, por tanto, obtenga la solución explícita de la cuestión (0,6 p.).

9.ª cuestión (2 ptos.)

- (*Mini-Tetris*). Calcule cuántas maneras existen de llenar completamente, sin solapamientos, un rectángulo $2\times n$ con piezas rectangulares 1×2 y cuadradas 2×2 pudiendo las piezas rotar ángulos que sean múltiplos de un ángulo recto.

10.ª cuestión (2 ptos.)

- Considere una partícula que se desplaza horizontalmente con un movimiento acelerado. Suponga que la distancia que recorre en cada segundo es el doble de la distancia que recorrió en el segundo previo. Si la partícula está inicialmente a una distancia de 2 unidades de un punto fijo O y a una distancia de 5 unidades de O después de dos segundos, ¿cuál es la posición de la partícula respecto de O transcurridos n segundos?

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Profesor: Juan Miguel León Rojas

Examen final extraordinario (28.6.2023) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque I		Bloque II		Bloque III		Bloque IV		Bloque V	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder como máximo a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido.

Bloque I. Lógica, conjuntos y correspondencias.

1.ª cuestión (2 ptos.)

• Considere el siguiente argumento, que llamamos $\mathcal{A}$:

> Si vas tú, viene Ángela. Si no vas tú, viene Micaela. Por lo tanto, si viene Micaela, no viene Ángela.

a. Formalice $\mathcal{A}$ en lógica proposicional. (0,2 p.)

b. Demuestre la no validez de $\mathcal{A}$ mediante la estrategia de los árboles semánticos (tablas analíticas/semánticas), para lo que debe: I construir y anotar convenientemente el árbol; (0,5 p.) II demostrar que es un árbol terminado; (0,5 p.) III demostrar la no validez de $\mathcal{A}$. (0,2 p.)

c. Identifique: I el conjunto Γ de fórmulas bien formadas para el que las ramas satisfactibles proporcionan modelos; (0,1 p.) II los modelos que proporcionan las ramas satisfactibles. (0,1 p.)

d. Demuestre, utilizando alguna estrategia de la lógica proposicional, que dichos modelos lo son para Γ. (0,2 p.)

e. Exprese en español las contraargumentaciones proporcionadas por tales modelos que permiten refutar $\mathcal{A}$. (0,2 p.)

2.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ No es válida una demostración gráfica.

• Siendo X e Y dos conjuntos y designando por $\cup$, $\cap$ y $\setminus$ la unión, intersección y diferencia de conjuntos, respectivamente, demuestre que $\{X \setminus Y, X \cap Y, Y \setminus X\}$ es una partición de $X \cup Y$ (se permite que los conjuntos de la partición puedan ser $\emptyset$).

Bloque II. Relaciones, inducción y estructuras algebraicas.

3.ª cuestión (2 ptos.)

• Dadas dos cadenas finitas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de la misma longitud, la *distancia de* Hamming entre ellas, $d_H(\bar{x}, \bar{y})$ es el número de posiciones en las que los símbolos correspondientes son diferentes. Sea C un conjunto de cadenas. Sea R la relación diádica definida en C por $\bar{x}R\bar{y} \Leftrightarrow d_H(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant 3$.

a. I Estudie si R satisface las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva y conexa (fuertemente completa) (0,24 p. c/u) y II diga qué tipo de relación es y por qué lo es (0,2 p.);

b. Proporcione un ejemplo de conjunto C y considerando R actuando en él, halle, bien las clases de tolerancia y las clases maximales de tolerancia, bien las clases de equivalencia, bien dibuje un diagrama de Hasse, dependiendo de que R sea, respectivamente, una relación de tolerancia, una relación de equivalencia o una ordenación en C. (0,6 p.)

4.ª cuestión (2 ptos.)

• En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, considere la ley de composición binaria: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x * y = x + y - x \cdot y$, siendo $+$, $-$ y $\cdot$ la suma, la diferencia y el producto habituales en $\mathbb{Q}$.

a. Estudie la estructura algebraica $(\mathbb{Q}; *)$. (1,5 p.)

b. I Encuentre un subconjunto propio A de $\mathbb{Q}$ tal que $(A; *)$ sea grupo abeliano; (0,15 p.) II construya su tabla de Cayley; (0,15 p.) III demuestre que $(A; *)$ es grupo abeliano. (0,2 p.)

Bloque III. Teoría de números.

5.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ Recuerde: se exige que usted demuestre las afirmaciones intermedias que haga; no las deje en meras conjeturas.

• Demuestre que para todo número natural impar n se satisface que el número $n^3 - n$ es divisible por 24.

6.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión, se exige que usted [I] proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta (0,4 p.) y [II] demuestre que tiene al menos una solución; (0,2 p.) después, se exige que usted utilice los coeficientes de Bézout y la teoría de las ecuaciones diofánticas para: [III] calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,4 p.) [IV] calcular la solución general de la ecuación propuesta en I); (0,4 p.) [V] calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,6 p.)

▷ **Importante**: Si no recordase cómo calcular los coeficientes de Bézout o la teoría de las ecuaciones diofánticas, podría resolver los apartados III), IV) y V) por teoría de congruencias (con las mismas puntuaciones).

• Supongamos que el día D se ejecutaron once procesos en el computador C, que el tiempo total de la ejecución fue de 91 segundos y que los procesos fueron de dos tipos, A y B, que son tales que un proceso de tipo A tarda en ejecutarse siete segundos menos que uno de tipo B. En estas condiciones, ¿cuánto dura la ejecución de un proceso de tipo A y de uno de tipo B? y ¿cuántos procesos de cada tipo se ejecutaron el día D en el computador C?

Bloque IV. Razonamiento combinatorio.

7.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión se exige que usted detalle su razonamiento combinatorio dejando claro qué definiciones, principios, teoremas, resultados o modelizaciones ha utilizado y cómo lo ha hecho.

• [a] ¿De cuántas formas puede un computador central c_0 repartir doce tareas indistinguibles entre cinco computadores auxiliares $c_1, \ldots, c_5$? (1 p.)

[b] ¿Y si no le está permitido a c_0 asignar más de siete tareas a ningún computador auxiliar? (1 p.)

8.ª cuestión (2 ptos.)

⚠ Para resolver esta cuestión se exige que usted: [I] incluya en su razonamiento alguna —a su elección— de las cuatro modelizaciones combinatorias —selección, distribución, partición, descomposición aditiva—; (1 p.) [II] interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1 p.)

▷ **Importante**: En cada una de las modelizaciones debe identificar claramente cómo está representado cada emparejamiento.

• Se dispone de dos listas (esto es, conjuntos totalmente ordenados) de n personas cada una. ¿De cuántas formas pueden emparejarse todas las personas de la primera lista con todas las de la segunda?

Bloque V. Ecuaciones en diferencias.

⚠ Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para, en todos los casos razonando su porqué, modelizar y resolver la situación expuesta en la cuestión en estudio: [I] proponga una ecuación en diferencias (ED) o más; (0,4 p.) [II] proponga un problema de valores iniciales (PVI); (0,12 p.) [III] demuestre que dicho PVI tiene solución única; (0,08 p.) [IV] calcule las raíces características pertinentes; (0,4 p.) [V] obtenga las soluciones de las ED concernientes; (0,4 p.) [VI] resuelva el mencionado PVI y, por tanto, obtenga la solución explícita de la cuestión. (0,6 p.)

9.ª cuestión (2 ptos.)

• Un dispositivo emite constantemente señales sonoras de tres tipos (bip, chof-chof y toc-toc) sin superposiciones. Una señal bip dura un segundo, una señal chof-chof, dos segundos y una señal toc-toc, también dos segundos. En n segundos, ¿de cuántas formas diferentes puede sonar dicho dispositivo?, en otras palabras, ¿de cuántas formas distintas puede el mencionado dispositivo llenar completamente y sin superposiciones un tiempo de n segundos con dichas señales sonoras bip, chof-chof y toc-toc?

10.ª cuestión (2 ptos.)

• Calcule el número de saludos que suceden entre n personas si todas se saludan entre sí una, y sólo una, vez (y ninguna persona se saluda a sí misma).

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas, 29 de mayo de 2024

Grados en I.I. en Ingeniería de Computadores y del Software

BLOQUE I. Examen TIPO 1

Para que el examen sea válido, debe marcar sólo una opción

Esta hoja debe ser entregada al salir del examen

NOMBRE Y APELLIDOS: ..... D.N.I.: .....

Ejercicio 1.- (1.5 puntos) Sean A y B dos habitantes de una isla. A dice: *"Si B es veraz, entonces soy falaz"*. Seguidamente, B dijo: *"No crea a A; miente"*.

- **Apartado 1.1.- (1 punto)** Este argumento puede formalizarse como sigue:

  (a) ☐ $(A \to (B \to \neg A)) \land (B \to \neg A)$

  (b) ☐ $(A \leftrightarrow (B \to \neg A)) \land (B \leftrightarrow \neg A)$

  (c) ☐ $(A \to (B \to \neg A)) \lor (B \to \neg A)$

  (d) ☐ $(A \leftrightarrow (B \to \neg A)) \lor (B \leftrightarrow \neg A)$

  (e) ☐ $(A \land (B \land \neg A)) \to (B \land \neg A)$

  NOTA. A: designa el hecho de ser A veraz. B: designa el hecho de ser B veraz.

  (Respuesta correcta: suma 1 pto. Incorrecta: resta 0.25 ptos. Sin contestar: no suma ni resta.)

- **Apartado 1.2.- (0.5 puntos)** ¿Qué son A y B, veraces o falaces?

  (a) ☐ A es falaz y B es falaz.

  (b) ☐ A es falaz y B es veraz.

  (c) ☐ A es veraz y B es falaz.

  (d) ☐ A es veraz y B es veraz.

  (Respuesta correcta: suma 0.5 ptos. Incorrecta: resta 0.15 ptos. Sin contestar: no suma ni resta.)

Ejercicio 2.- (1 punto) Utilizando la estrategia de los árboles semánticos, podemos afirmar que el siguiente argumento formulado en lógica proposicional, es válido:

$$\mathcal{A}: \qquad \Big((p \to q) \land (\neg p \to r)\Big) \to (r \to \neg q)$$

(a) ☐ Verdad.

(b) ☐ Falso.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas, 29 de mayo de 2024

Grados en I.I. en Ingeniería de Computadores y del Software

BLOQUE II. Examen TIPO 1

Para que el examen sea válido, debe marcar sólo una opción

Esta hoja debe ser entregada al salir del examen

NOMBRE Y APELLIDOS: .... D.N.I.: .....

Ejercicio 1.- (1 punto) Dadas dos funciones $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow C$, y las siguientes afirmaciones:

1) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva,

2) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva,

se cumple que:

☐ solo 1) es cierta. ☐ solo 2) es cierta. ☐ ambas son ciertas. ☐ ninguna es cierta.

Ejercicio 2.- (0,75 puntos) Sea R una relación en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,4), (4,2)\}.$$

¿Es R una relación de equivalencia?

☐ Sí, porque es reflexiva, simétrica y transitiva.
☐ No, porque no es reflexiva.
☐ No, porque no es simétrica.
☐ No, porque no es transitiva.
☐ No, porque no es ni reflexiva, ni simétrica, ni transitiva.

Ejercicio 3.- (1 punto) ¿Cuál es la última cifra de 2023^{2023}?

☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7 ☐ 9

Ejercicio 4.- (1 punto) De todas las soluciones enteras de $89x + 55y = 1$, ¿cuántas verifican que $0 \leq x \leq 1000$?

☐ 11 ☐ 12 ☐ 18 ☐ 19 ☐ ninguna de las anteriores.

Nota: los ejercicios sin contestar valdrán 0 **puntos y los erróneamente contestados** $-1/3$ **del valor de la pregunta.**

Departamento de Matemáticas

Grados en I.I. en Ingeniería de Computadores y del Software

Ampliación de Matemáticas, 29 de mayo de 2024, Tipo I

APELLIDOS: **NOMBRE:**

TERCERA PARTE

Ejercicio 1. (0,75 puntos)(sin contestar 0 puntos y erróneamente contestado -0,25 puntos) ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEFGH contienen la cadena ABC ?

☐ 8! ☐ 7! ☐ 6! ☐ 5! ☐ 4! ☐ Ninguna de las anteriores

Ejercicio 2. (1,25 puntos)(sin contestar 0 puntos y erróneamente contestado -0,25 puntos) Una urna contiene siete bolas numeradas del uno al siete. Las bolas se extraen todas, de una en una y sin reposición. A la par de las extracciones, se escriben las cifras resultantes por orden de salida y de izquierda a derecha. Razone con argumentos combinatorios cuántos números así formados empiezan y terminan por cifra par.

☐ 8! ☐ 7! ☐ 6! ☐ 5! ☐ 4! ☐ Ninguna de las anteriores

Ejercicio 3. (1,75 puntos)(sin contestar 0 puntos y erróneamente contestado -0,5 puntos) (Mini-Tetris,II). Calcule cuántas maneras existen de llenar completamente, sin solapamientos, un rectángulo $2 \times n$ con piezas rectangulares 1×2 y cuadradas 2×2 pudiendo las piezas rotar ángulos que sean múltiplos de un ángulo recto.

☐ $\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n$ ☐ $\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}(2)^n$ ☐ $\frac{1}{3}(1)^n + \frac{1}{3}(-2)^n$

☐ $2n!$ ☐ $2(n-1)!$ ☐ Ninguna de las anteriores

Nota: Si la puntuación resultante tras sumar las correspondientes puntuaciones de los tres ejercicios sale negativa el valor de esta parte será 0 puntos.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Examen final extraordinario (3.7.2024) — **Hoja de enunciados y respuestas**

Tiempo máximo: **160 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... **DNI** ... ...

Tabla 0: ¿Entrega respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Tabla 1: Respuestas a las cuestiones respondidas (únicamente si entrega respuestas)
—marque con un aspa (×) las respuestas a las respondidas—

	0.ª	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª
a.																
b.																
c.																
d.																

Debe entregar esta hoja cumplimentada:
• si no entrega respuestas (marque el cuadro correspondiente en la Tabla 0), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas) (no marque nada en la Tabla 1);
• si entrega respuestas (marque el cuadro correspondiente en la Tabla 0), debe también marcar en la Tabla 1 las respuestas a las cuestiones respondidas.
Todas las cuestiones se puntuarán igual: 0,625 si acierto, −0,625/3 si error y 0 si no se responde.
En caso de suma final negativa, la calificación del examen es cero (0).

0.ª cuestión.— Suponiendo verdadera la afirmación «si el programa funciona o habrá más recursos, entonces habrá más recursos», ¿qué podemos concluir si no habrá más recursos?

a. Que el programa funciona.
b. Que el programa no funciona.
c. Que si el programa funciona, habrá más recursos.
d. No podemos concluir nada.

1.ª cuestión.— Considere el siguiente argumento, que llamamos $\mathcal{A}$:

> De tres jugadores, A, B y C, se sabe sólo que «C miente siempre que miente A» o que «la mentira de B siempre es seguida de la mentira de C». Por lo tanto, se deduce que «si A o B mienten, entonces C miente».

¿Cuál de las siguientes es una formalización en lógica proposicional de $\mathcal{A}$?

a. $(\neg A \to \neg C) \vee (\neg B \to \neg C) \to (\neg(A \vee B) \to \neg C)$.
b. $(A \to C) \vee (B \to C) \to (A \vee B \to C)$.
c. $(A \to C) \vee (B \to C) \to (\neg(A \vee B) \to C)$.
d. $(C \to A) \vee (B \to C) \to (A \vee B \to C)$.

2.ª cuestión.— Siendo $^{\complement}$, $\cup$, $\cap$, $-$ y $\oplus$ las operaciones complementario, unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica entre conjuntos, respectivamente, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. Si $A \subseteq B$, entonces $A^{\complement} \cap B = \emptyset$.
b. $A^{\complement} - B^{\complement} = A - B$.
c. $A \oplus A = A$.
d. $(A - B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B$.

3.ª cuestión.— Sólo una de las siguientes afirmaciones es verdad.

a. Si $q \to r$ es verdadera, entonces $(p \vee q) \to (p \vee r)$ es falsa.
b. Si $q \to r$ es verdadera, entonces $(p \vee q) \to (p \vee r)$ puede ser verdadera o falsa.
c. Si $q \to r$ es falsa, entonces $(p \vee q) \to (p \vee r)$ puede ser verdadera o falsa.
d. Si $q \to r$ es falsa, entonces $(p \vee q) \to (p \vee r)$ es verdadera.

4.ª cuestión.— Sean R y S dos relaciones definidas en un conjunto X, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. Si $R \cup S$ es reflexiva, R y S son reflexivas.
b. Si $R^{\complement} \cap S^{\complement}$ es reflexiva, R y S son reflexivas.
c. Si $R \circ R$ es reflexiva, R es reflexiva.
d. Si R^{-1} reflexiva, R reflexiva.

5.ª cuestión.— ¿Cuál de las siguientes relaciones entre personas es de equivalencia?

a. xRy si, y sólo si, hablan el mismo idioma.
b. xRy si, y sólo si, se conocen.
c. xRy si, y sólo si, y es, bien la misma persona que x, bien el padre de x.
d. xRy si, y sólo si, son paisanas.

6.ª cuestión.— Sea $*$ una operación en un conjunto X en el que existe elemento neutro para $*$ y satisface para todo $x, y, z \in X$, $x * (y * z) = (x * z) * y$.

a. $*$ es conmutativa y asociativa en X.
b. $*$ es conmutativa en X, pero no asociativa.
c. $*$ no es conmutativa en X, aunque sí asociativa.
d. $*$ ni es conmutativa ni asociativa en X.

7.ª cuestión.— De los siguientes criterios de divisibilidad por 11 en el sistema de numeración decimal, ¿cuál surge directamente del criterio general de divisibilidad? Un número es divisible por 11 si, y sólo si,

a. la suma de sus cifras de lugar impar menos la suma de sus cifras de lugar par es divisible por 11 (p. ej., $2-5+3=0=0\cdot 11$).
b. la suma en bloques de dos cifras de derecha a izquierda es divisible por 11 (p. ej., $2+53=55=5\cdot 11$).
c. la resta de la última cifra del resto es divisible por 11 (p. ej., $25-3=22=2\cdot 11$).
d. la suma de diez veces la última cifra y el resto es divisible por 11 (p. ej., $25+30=55=5\cdot 11$).

8.ª cuestión.— ¿Cuál es el inverso de 7 módulo 23?

a. 7.
b. 8.
c. 9.
d. 10.

9.ª cuestión.— Se quiere empaquetar 64 objetos para su transporte. Se dispone de 5 cajas con capacidad para 8 objetos cada una y otras 5 con capacidad doble, esto es, para 16 objetos cada una. Si no se tiene por qué utilizar todas las cajas sino maximizar el número de objetos por caja, ¿de qué ecuación diofántica podemos partir para hallar de cuántas formas se puede hacer el empaquetado final?

a. $5x+10y=8$.
b. $x+2y=5$.
c. $x+2y=8$.
d. $5(x+8)+5(y+16)=64$.

10.ª cuestión.— ¿Cuántas palabras binarias (base 2) de longitud n con k ceros existen?

a. n^k.
b. $(n-k)!\cdot k!$.
c. $(n-k)!+k!$.
d. $\binom{n}{n-k}$.

11.ª cuestión.— Consideremos las palabras hexadecimales de longitud 4, esto es, palabras con la forma $n_0n_1n_2n_3$, con $n_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F}\}$. De entre ellas, ¿cuántas hay que contengan A y B —esto es, que algún n_i sea A y algún n_i sea B— y tales que ningún n_i pertenezca a $\{0,1,2,3,4,5,6\}$? (Por ejemplo, 7BEA, A98B y ABBA son tres de tales palabras, pero A9FE y A80B no lo son).

a. 770.
b. 997.
c. 1631.
d. 4032.

12.ª cuestión Una ONG recibe en su central una donación de 393 sacos idénticos de arroz. Dicha ONG decide repartirlos entre sus siete escuelas y tres hospitales asegurando que cada escuela reciba al menos 30 sacos y que cada hospital reciba al menos 60 sacos. ¿De cuántas formas puede la ONG repartir todos los sacos?

a. $VR(7,30)+VR(3,60)$.
b. $CR(7,30)+CR(3,60)$.
c. $PR(210,180)$.
d. $CR(10,3)$.

13.ª cuestión.— Sea la ecuación en diferencias $a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2}=0$, con $0\leq n$, sabiendo que $a_2=2$ y $a_3=3$, ¿cuál es la solución de este problema de valores iniciales?

a. $a_n=n$.
b. $a_n=2^{n-2}+1$.
c. $a_n=3^{n-2}-n+3$.
d. $a_n=4^{n-2}-2n+5$.

14.ª cuestión.— ¿Qué ecuación en diferencias debemos utilizar para calcular cuántas palabras binarias (base 2) de longitud n no tienen dos unos consecutivos?

a. $a_n-2a_{n-1}+1=0$.
b. $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$.
c. $a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}+2=0$.
d. $2a_n-a_{n-1}-3a_{n-2}-1=0$.

15.ª cuestión Consideremos una partícula que se desplaza horizontalmente con un movimiento acelerado. Supongamos que la distancia que recorre en cada segundo es el doble de la distancia que recorrió en el segundo previo. Si p_t denota la posición de la partícula en el segundo t, ¿qué ecuación en diferencias debemos utilizar para calcular la posición de la partícula respecto de O transcurridos n segundos?

a. $2p_t-p_{t-1}=0$.
b. $p_t-2p_{t-1}=0$.
c. $p_t-3p_{t-1}+2p_{t-2}=0$.
d. $p_t-2p_{t-1}+3p_{t-2}=0$.

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido responder y que lo respondido tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega respuestas (y, por tanto, marcar las respuestas de las cuestiones respondidas) o marcar que no entrega respuestas («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Examen final extraordinario (29.1.2024) — **Hoja de enunciados y respuestas**

Tipo A — Tiempo máximo: **160 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Nombre: ... ... Apellidos: ... ... DNI ... ...

Tabla 0: ¿Entrega respuestas?

—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Tabla 1: Respuestas a las cuestiones respondidas (únicamente si entrega respuestas)

—marque con un aspa (×) las respuestas a las respondidas—

	0.ª	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª
a.																
b.																
c.																
d.																

Debe entregar esta hoja cumplimentada:
• si no entrega respuestas (marque el cuadro correspondiente en la Tabla 0), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas) (no marque nada en la Tabla 1);
• si entrega respuestas (marque el cuadro correspondiente en la Tabla 0), debe también marcar en la Tabla 1 las respuestas a las cuestiones respondidas.
Todas las cuestiones se puntuarán igual: 0,625 si acierto, −0,625/3 si error y 0 si no se responde..
En caso de suma final negativa, la calificación del examen es cero (0).

0.ª cuestión.— Suponiendo verdadera la afirmación «si el sistema está operativo o se incrementará la capacidad, entonces se incrementará la capacidad», ¿qué podemos concluir si no se incrementará la capacidad?

a. Que el sistema está operativo.
b. Que el sistema no está operativo.
c. Que si el sistema está operativo, se incrementará la capacidad.
d. No podemos concluir nada.

1.ª cuestión.— Consideremos el siguiente argumento, que llamamos $\mathcal{A}$:

De tres servidores, A, B y C, se sabe sólo que «C falla siempre que falla A» o que «el fallo de B siempre es seguido del fallo de C». Por lo tanto, se deduce que «si A o B fallan, entonces C falla».

¿Cuál de las siguientes es una formalización en lógica proposicional de $\mathcal{A}$?

a. $(\neg A \to \neg C) \vee (\neg B \to \neg C) \to (\neg(A \vee B) \to \neg C)$.
b. $(A \to C) \vee (B \to C) \to (A \vee B \to C)$.
c. $(A \to C) \vee (B \to C) \to (\neg(A \vee B) \to C)$.
d. $(C \to A) \vee (B \to C) \to (A \vee B \to C)$.

2.ª cuestión.— Siendo $^{\complement}$, $\cup$, $\cap$, $-$ y $\oplus$ las operaciones complementario, unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica entre conjuntos, respectivamente, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$;
b. $A^{\complement} \cap B = A \oplus B^{\complement}$.
c. $A \oplus A^{\complement} = \emptyset$.
d. $(A \oplus B)^{\complement} = (A \cap B) \cup (A^{\complement} \cap B^{\complement})$

3.ª cuestión.— Sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera, ¿cuál?

a. Si $p \to q$ es verdadera, entonces $(\neg p \wedge q)$ es verdadera.
b. Si $p \to q$ es verdadera, entonces $(\neg p \wedge q)$ es falsa.
c. Si $p \to q$ es falsa, entonces $(\neg p \wedge q)$ puede ser verdadera o falsa.
d. Si $p \to q$ es falsa, entonces $(\neg p \wedge q)$ es falsa.

4.ª cuestión.— Sean $^{-1}$, $\cup$, $\cap$ y $\circ$ las operaciones inversa, unión, intersección y composición de relaciones, respectivamente, y sean R y S dos relaciones definidas en un conjunto X, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. Si R y S son transitivas, $R \cup S$ es transitiva.
b. Si R es transitiva, $R^{\complement}$ es transitiva.
c. Si R y S son transitivas, $R \circ S$ es transitiva.
d. Si R es transitiva, R^{-1} es transitiva.

5.ª cuestión.— ¿Cuál de las siguientes relaciones entre personas es de equivalencia parcial?

a. xRy si, y sólo si, tienen la misma afición.
b. xRy si, y sólo si, se conocen.
c. xRy si, y sólo si, van al mismo gimnasio.
d. xRy si, y sólo si, tienen opiniones opuestas y están de acuerdo en todo.

6.ª cuestión.— Sea $*$ una operación en un conjunto X en el que existe elemento neutro para $*$ y satisface para todo $x, y, z \in X$, $x * (y * z) = (x * y) * z$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. $*$ es conmutativa y asociativa en X.
b. $*$ es conmutativa en X, pero no asociativa.
c. $*$ es asociativa en X y puede que conmutativa.
d. $*$ ni es conmutativa ni asociativa en X.

7.ª cuestión.— De los siguientes criterios de divisibilidad por 8 en el sistema de numeración decimal, ¿cuál surge directamente del criterio general de divisibilidad? Un número es divisible por 8 si, y sólo si,

a. la suma de la cifra de las unidades más el doble de la cifra de las decenas más el cuádruple de la cifra de las centenas es divisible por 8 (p. ej., 262 144, pues $4 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 16 = 2 \cdot 8$).
b. la suma de la última cifra más el doble del resto es divisible por 8 (p. ej., 256, pues $6 + 2 \cdot 25 = 56 = 7 \cdot 8$).
c. el número formado por las tres últimas cifras es divisible por 8 (p. ej., 1152, pues $152 = 19 \cdot 8$).
d. si la cifra de las centenas es par, el número formado por las dos últimas cifras es divisible por 8 y si la cifra de las centenas es impar, el número formado por las dos últimas cifras es el cuádruple de un número impar (p. ej., 256, pues $56 = 7 \cdot 8$, y 1152, pues $52 = 4 \cdot 13$).

8.ª cuestión.— ¿Cuál es el inverso de 3 módulo 13?

a. 3.
b. 6.
c. 9.
d. 12.

9.ª cuestión.— ¿De qué ecuación diofántica podemos partir para averiguar cuáles son los números enteros positivos, múltiplos de tres, terminados en cinco y menores que cien?

a. $3x - 10y - 5 = 0$.
b. $3x + 10y + 5 = 0$.
c. $3x - 100y - 5 = 0$.
d. $3x + 100y + 5 = 0$.

10.ª cuestión.— En una prueba de rendimiento, ¿de cuántas formas puede un computador central repartir tres tareas distinguibles entre siete computadores auxiliares si ninguno de éstos puede recibir más de una?

a. $C(7, 3)$.
b. $P(7) \cdot C(7, 3)$.
c. $V(7, 3)$.
d. $P(7) \cdot V(7, 3)$.

11.ª cuestión.— Un restaurante tiene una oferta de ocho menús, ofreciendo cada día uno de ellos como menú del día. Un menú semanal variado es una colección de siete menús diarios todos diferentes. ¿Cuántas distribuciones de menús semanales variados son posibles?

a. $C(8, 7)$.
b. $P(8) \cdot C(8, 7)$.
c. $V(8, 7)$.
d. $P(7) \cdot V(8, 7)$.

12.ª cuestión.— Un día festivo determinado, el restaurante de la cuestión 11.ª ofrece no sólo uno sino los ocho menús como menús del día. ¿De cuántas formas puede pedir comida un grupo de cuatro personas si cada una quiere menú?

a. $CR(8, 4)$.
b. $P(4) \cdot CR(8, 4)$.
c. $VR(8, 4)$.
d. $P(4) \cdot VR(8, 4)$.

13.ª cuestión.— Un robot puede dar pasos de uno o dos metros. ¿Qué ecuación en diferencias debemos utilizar para calcular el número de formas en que el robot puede recorrer n metros?

a. $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$.
b. $a_n - 2a_{n-1} + 1 = 0$.
c. $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2 = 0$.
d. $2a_n - a_{n-1} - 3a_{n-2} - 1 = 0$.

14.ª cuestión.— Queremos transportar n objetos de tres tamaños distintos A, B, y C, desde el sitio P al sitio Q. De una vez, es posible que transportemos, o bien un objeto de tamaño A, o bien uno de tamaño B o bien dos de tamaño C. ¿Qué ecuación en diferencias debemos utilizar para calcular de cuántas formas pueden transportarse los n objetos desde el sitio P al sitio Q?

a. $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} - 1 = 0$.
b. $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$.
c. $a_n - 3a_{n-1} + 1 = 0$.
d. $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$.

15.ª cuestión.— Una granja de cómputo dispone de tres tipos de computadores. Alquilar un minuto de cómputo de un computador del primer tipo cuesta un euro; alquilarlo de un computador del segundo o tercer tipo cuesta dos euros. ¿Qué ecuación en diferencias debemos utilizar para calcular de cuántas formas pueden gastarse n euros en alquilar minutos de cómputo en esta granja?

a. $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} - 1 = 0$.
b. $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$.
c. $a_n - 2a_{n-1} + 1 = 0$.
d. $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$.

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido responder y que lo respondido tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega respuestas (y, por tanto, marcar las respuestas de las cuestiones respondidas) o marcar que no entrega respuestas («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Examen final extraordinario (29.1.2024) — **Hoja de enunciados y respuestas**

Tipo B — Tiempo máximo: **160 minutos** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Nombre: ... ... Apellidos: ... ... DNI ... ...

Tabla 0: ¿Entrega respuestas?

—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Tabla 1: Respuestas a las cuestiones respondidas (únicamente si entrega respuestas)

—marque con un aspa (×) las respuestas a las respondidas—

	0.ª	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª	11.ª	12.ª	13.ª	14.ª	15.ª
a.																
b.																
c.																
d.																

Debe entregar esta hoja cumplimentada:
• si no entrega respuestas (marque el cuadro correspondiente en la Tabla 0), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas) (no marque nada en la Tabla 1);
• si entrega respuestas (marque el cuadro correspondiente en la Tabla 0), debe también marcar en la Tabla 1 las respuestas a las cuestiones respondidas.
Todas las cuestiones se puntuarán igual: 0,625 si acierto, −0,625/3 si error y 0 si no se responde..
En caso de suma final negativa, la calificación del examen es cero (0).

0.ª cuestión.— Suponiendo verdadera la afirmación «si la aplicación está activa o se aumentará la memoria, entonces se aumentará la memoria», ¿qué podemos concluir si no se aumentará la memoria?

a. Que la aplicación está activa.
b. Que la aplicación no está activa.
c. Que si la aplicación está activa, se aumentará la memoria.
d. No podemos concluir nada.

1.ª cuestión.— Consideremos el siguiente argumento, que llamamos $\mathcal{A}$:

> De tres sistemas, A, B y C, se sabe sólo que «C se reinicia siempre que se reinicia A» o que «el reinicio de B siempre es seguido del reinicio de C». Por lo tanto, se deduce que «si A o B se reinician, entonces C se reinicia».

¿Cuál de las siguientes es una formalización en lógica proposicional de $\mathcal{A}$?

a. $(\neg A \to \neg C) \vee (\neg B \to \neg C) \to (\neg(A \vee B) \to \neg C)$.
b. $(A \to C) \vee (B \to C) \to (A \vee B \to C)$.
c. $(A \to C) \vee (B \to C) \to (\neg(A \vee B) \to C)$.
d. $(C \to A) \vee (B \to C) \to (A \vee B \to C)$.

2.ª cuestión.— Siendo $^{\complement}$, $\cup$, $\cap$, $-$ y $\oplus$ las operaciones complementario, unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica entre conjuntos, respectivamente, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$;
b. $A^{\complement} \cap B = A \oplus B^{\complement}$.
c. $A \oplus A^{\complement} = \emptyset$.
d. $(A \oplus B)^{\complement} = (A \cap B) \cup (A^{\complement} \cap B^{\complement})$

3.ª cuestión.— Sólo una de las siguientes afirmaciones es verdad, ¿cuál?

a. Si $p \to q$ es verdadera, entonces $(\neg p \wedge q)$ es verdadera.
b. Si $p \to q$ es verdadera, entonces $(\neg p \wedge q)$ es falsa.
c. Si $p \to q$ es falsa, entonces $(\neg p \wedge q)$ puede ser verdadera o falsa.
d. Si $p \to q$ es falsa, entonces $(\neg p \wedge q)$ es falsa.

4.ª cuestión.— Sea R una relación definida en un conjunto X, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. R no puede ser irreflexiva y antisimétrica;
b. R no puede ser irreflexiva y no antisimétrica;
c. R puede ser antisimétrica y no irreflexiva;
d. R no puede ser no irreflexiva y no antisimétrica.

5.ª cuestión.— ¿Cuál de las siguientes relaciones entre personas es de equivalencia parcial?

a. xRy si, y sólo si, son amigas.
b. xRy si, y sólo si, son vecinas.
c. xRy si, y sólo si, están en el mismo club de lectura.
d. xRy si, y sólo si, están físicamente juntas, ambas en Cáceres y ambas en Badajoz, al mismo tiempo.

6.ª cuestión.— Sea $*$ una operación en un conjunto X en el que existe elemento neutro para $*$ y todo elemento de X tiene simétrico y satisface para todo $x, y \in X$, $x * y = y * x$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. $*$ es conmutativa y asociativa en X.
b. $*$ es conmutativa en X, pero no asociativa.
c. $*$ es conmutativa en X y puede que asociativa.
d. $*$ ni es conmutativa ni asociativa en X.

7.ª cuestión.— De los siguientes criterios de divisibilidad por 7 en el sistema de numeración decimal, ¿cuál surge directamente del criterio general de divisibilidad? Un número es divisible por 7 si, y sólo si,

a. la suma de cinco veces la última cifra y el resto es divisible por 7 (p. ej., 161, pues $16+(1\cdot 5)=21=3\cdot 7$).
b. la suma alternada en bloques de tres cifras de derecha a izquierda es divisible por 7 (p. ej., 108 175 616 801, pues $801-616+175-108=252=36\cdot 7$).
c. la resta de dos veces la última cifra del resto es divisible por 7 (p. ej., 161, pues $16-(1\cdot 2)=14=2\cdot 7$).
d. la suma de los productos de cada cifra de derecha a izquierda por las cifras 1, 3, 2, −1, −3, −2, 1, 3, 2, −1, ... es divisible por 7 (p. ej., 25921, pues $1\cdot 1+2\cdot 3+9\cdot 2+5\cdot(-1)+2\cdot(-3)=14=2\cdot 7$).

8.ª cuestión.— ¿Cuál es el inverso de 5 módulo 12?

a. 3.
b. 5.
c. 7.
d. 10.

9.ª cuestión.— Sabemos que un texto sólo tiene palabras de una, dos o tres letras; entonces, si el texto tuviese 11 letras y constase de 6 palabras, ¿de qué ecuación diofántica pudiésemos partir para hallar cuántas palabras de cada tipo tendría dicho texto?

a. $x+2y+3z=66$.
b. $y+2z=5$.
c. $x+2y+3z=6$.
d. $x+3z=5$.

10.ª cuestión.— En una prueba de rendimiento, ¿de cuántas formas puede un computador central repartir tres tareas indistinguibles entre siete computadores auxiliares si cualquiera de éstos puede recibir cualquier número de tareas?

a. $CR(7,3)$.
b. $PR(7,3)$.
c. $VR(7,3)$.
d. $P(7)\cdot C(7,3)$.

11.ª cuestión.— Una ONG ha preparado tres tipos de obsequios para sus n personas físicas donantes. Si tiene un número suficiente de cada tipo y quiere enviar uno o más obsequios a cada una pero no quiere que ninguna reciba dos obsequios del mismo tipo, entonces, ¿de cuántas formas puede la ONG enviar los obsequios?

a. $V(3,n)$.
b. $VR(7,n)$.
c. $CR(7,n)$.
d. $C(3,n)$.

12.ª cuestión.— ¿De cuántas formas pueden colocarse alineadas las cinco cifras decimales pares y las cinco cifras decimales impares de manera que no haya dos cifras decimales impares juntas?

a. $P(5)\cdot V(6,5)$.
b. $P(5)\cdot C(6,5)$.
c. $P(10)-V(10,2)$.
d. $P(10)-C(10,2)$.

13.ª cuestión.— ¿Qué ecuación en diferencias debemos utilizar para calcular cuántas palabras ternarias (base 3) de longitud n no tienen dos cifras consecutivas iguales?

a. $a_n-2a_{n-1}=0$.
b. $a_n-3a_{n-1}+3a_{n-2}=0$.
c. $a_n-a_{n-1}-3a_{n-2}=0$.
d. $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}-2=0$.

14.ª cuestión.— Si lanzamos n veces una moneda al aire, ¿qué ecuación en diferencias debemos utilizar para calcular en cuántos resultados posibles (sucesos elementales) no aparecen dos caras consecutivas? (Por ejemplo, si $n=2$, son tres: ⟨cara, cruz⟩, ⟨cruz, cara⟩, ⟨cruz, cruz⟩).

a. $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$.
b. $a_n-2a_{n-1}+1=0$.
c. $a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}+2=0$.
d. $2a_n-a_{n-1}-3a_{n-2}-1=0$.

15.ª cuestión.— Siendo n un número natural, calculemos el número de subconjuntos de $\{1,2,\ldots,n\}$ que no contienen números consecutivos.

a. $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$.
b. $a_n-2a_{n-1}+1=0$.
c. $a_n-a_{n-1}-2a_{n-2}+2=0$.
d. $2a_n-a_{n-1}-3a_{n-2}-1=0$.

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido responder y que lo respondido tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega respuestas (y, por tanto, marcar las respuestas de las cuestiones respondidas) o marcar que no entrega respuestas («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Examen final ordinario (27.5.2025) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque I		Bloque II		Bloque III		Bloque IV		Bloque V	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder como máximo a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido.

Bloque I. Lógica, conjuntos y correspondencias.

1.ª cuestión (2 ptos.)

• Considere la siguiente argumentación, que llamamos $\mathcal{A}$:

> Si vas tú, viene Ángela. Si no vas tú, viene Micaela. Por lo tanto, si viene Micaela, no viene Ángela.

a. Formalice $\mathcal{A}$ en lógica proposicional. (0,2 p.)
b. Demuestre la no validez de $\mathcal{A}$ mediante la estrategia de los árboles semánticos (tablas analíticas/semánticas) (debe anotar convenientemente el árbol y debe demostrar la satisfactibilidad o insatisfactibilidad de toda rama) (1,2 p.)
c. Identifique los modelos que proporcionan las ramas satisfactibles y el conjunto Γ de fórmulas bien formadas para el que los proporcionan. (0,2 p.)
d. Demuestre, utilizando alguna estrategia de la lógica proposicional, que dichos modelos lo son para Γ. (0,2 p.)
e. Exprese en español las contraargumentaciones proporcionadas por tales modelos que permiten refutar $\mathcal{A}$. (0,2 p.)

2.ª cuestión (2 ptos.)

▶ No es válida una demostración ni diagramática ni gráfica.

• Siendo A y B dos conjuntos y designando por $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $=$, la unión, intersección, diferencia, e igualdad de conjuntos, respectivamente, entonces, utilizando teoría de conjuntos:

a. demuestre por doble inclusión que $A \setminus B \cup (A \cap B) \cup B \setminus A = A \cup B$; (1 p.)
b. demuestre que $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ es una partición de $A \cup B$. (1 p.)

Bloque II. Relaciones, inducción y estructuras algebraicas.

3.ª cuestión (2 ptos.)

• En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, se define la relación diádica R: $\forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

a. Demuestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. (1 p.)
b. Utilice la definición de clase de equivalencia para encontrar todos los números enteros pertenecientes a la clase de equivalencia de $a \in \mathbb{Z}$. (1 p.)

4.ª cuestión (2 ptos.)

▶ Para responder a los apartados b), c) y d), puede usted razonar con la tabla hallada en a).

• Sean $2^{\{x,y\}}$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\{x, y\}$ y Δ la diferencia simétrica de conjuntos.

a. Halle razonadamente la tabla de Cayley de Δ en $2^{\{x,y\}}$. (0, 16 p.)
b. Demuestre que $\left(2^{\{x,y\}}; \Delta\right)$ tiene estructura de: I) magma, II) semigrupo, III) monoide, IV) grupo. (0, 32 p. c/u)
c. ¿Es $\left(2^{\{x,y\}}; \Delta\right)$ un grupo abeliano? (0, 16 p.)
d. ¿A cuál es isomorfo $\left(2^{\{x,y\}}; \Delta\right)$, al grupo cíclico C_4 o al grupo de Klein K_4? ¿Por qué? (0, 4 p.)

Bloque III. Teoría de números.

5.ª cuestión (2 ptos.)

- [•] [a] Enuncie el criterio general de divisibilidad en cualquier base; (0,2 p.)
  [b] utilícelo para hallar criterios de divisibilidad por 11 y por 101, en base diez; (0,5 p. cada uno)
  [c] utilice lo anterior para, en base diez, determinar las cifras x e y para que el número $7x1y4$ sea múltiplo de 11 y de 101. (0,8 p.)

6.ª cuestión (2 ptos.)

► Para resolver esta cuestión, se exige que usted [I] proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta (0,4 p.) y [II] demuestre que tiene al menos una solución; (0,2 p.) después, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para: [III] calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,4 p.) [IV] calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,4 p.) [V] calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,6 p.)

- [•] Supongamos que el día D se ejecutaron once procesos en el computador C, que el tiempo total de la ejecución fue de 91 segundos y que los procesos fueron de dos tipos, A y B, que son tales que un proceso de tipo A tarda en ejecutarse siete segundos menos que uno de tipo B. En estas condiciones, ¿cuánto dura la ejecución de un proceso de tipo A y de uno de tipo B? y ¿cuántos procesos de cada tipo se ejecutaron el día D en el computador C?

Bloque IV. Razonamiento combinatorio.

7.ª cuestión (2 ptos.)

- [•] Demuestre combinatoriamente (sin usar los conceptos, ni de número factorial ni de número factorial descendente ni de número factorial ascendente):
  [a] $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$; (1 p.)
  [b] $\binom{n+2}{k}=\binom{n}{k}+2\cdot\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k-2}$. (1 p.)

8.ª cuestión (2 ptos.)

► Para resolver esta cuestión se exige que usted: [I] incluya en su razonamiento alguna —a su elección— de las cuatro modelizaciones combinatorias —selección, distribución, partición, descomposición aditiva—; (1 p.) [II] interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1 p.)
► En cada una de las modelizaciones debe identificar claramente cómo está representado cada número.

- [•] En el primer millar de números enteros no negativos, esto es, desde 0 hasta 999, ambos incluidos, ¿qué hay más, números que tienen alguna cifra 1 o números que no la tienen?

Bloque V. Ecuaciones en diferencias.

► Para cualquiera de las dos cuestiones siguientes se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias para, en todos los casos razonando su porqué, modelizar y resolver la situación expuesta en la cuestión en estudio: [I] proponga una ecuación en diferencias (ED) o más (0,4 p.); [II] proponga un problema de valores iniciales (PVI) (0,12 p.); [III] demuestre que dicho PVI tiene solución única (0,08 p.); [IV] calcule las raíces características pertinentes (0,4 p.); [V] obtenga las soluciones de las ED concernientes (0,4 p.), y [VI] resuelva el mencionado PVI y, por tanto, obtenga la solución explícita de la cuestión (0,6 p.).

9.ª cuestión (2 ptos.)

- [•] Calcule el número de saludos que suceden entre n personas si todas se saludan entre sí una, y sólo una, vez (y ninguna persona se saluda a sí misma).

10.ª cuestión (2 ptos.)

- [•] Considere una partícula que se desplaza horizontalmente con un movimiento acelerado. Suponga que la distancia que recorre en cada segundo es el doble de la distancia que recorrió en el segundo previo. Si la partícula está inicialmente a una distancia de 2 unidades de un punto fijo O y a una distancia de 5 unidades de O después de dos segundos, ¿cuál es la posición de la partícula respecto de O transcurridos n segundos?

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.

Departamento de Matemáticas

Ampliación de Matemáticas (UEX501272)

Profesor:
Juan Miguel León Rojas

Examen final extraordinario (18.6.2025) — **Hoja de enunciados**

Tiempo máximo: **2 h 30 min** — Máxima puntuación: **10 ptos.**

Nombre: ... ... **Apellidos:** ... ... **DNI** ... ...

¿Entrega hojas de respuestas?
—marque con un aspa (×)—

Sí		No	

Cuestiones elegidas
—marque con un aspa (×) las elegidas (**sólo una por bloque**)—

Bloque I		Bloque II		Bloque III		Bloque IV		Bloque V	
1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª

Debe responder como máximo a 5 cuestiones, exactamente una de cada bloque. Todas ellas tendrán una calificación máxima de 2 puntos. Caso de que responda más de 5 cuestiones, en la corrección sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras respondidas que sean de distintos bloques, según el orden en que usted haya respondido a las cuestiones. Si desea que alguna de las respuestas no se tenga en cuenta en la corrección, debe indicarlo claramente, por ejemplo, tachándola. Debe entregar esta hoja cumplimentada: si no entrega ninguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), su participación en este examen no será calificada («No presentado», en actas); si entrega alguna hoja de respuestas (marque el cuadro correspondiente), debe marcar también las cuestiones que ha elegido.

Bloque I. Lógica, conjuntos y correspondencias.

1.ª cuestión (2 ptos.)

● Considere la siguiente argumentación, que llamamos $\mathcal{A}$:

> Si vas tú, viene Ángela. Si no vas tú, viene Micaela. Por lo tanto, si viene Micaela, no viene Ángela.

a. Formalice $\mathcal{A}$ en lógica de juntores. (0,2 p.)
b. Demuestre la no validez de $\mathcal{A}$ mediante la estrategia de los árboles semánticos (tablas analíticas/semánticas); para ello: I identifique el conjunto Γ de fórmulas para el que se intenta hallar una refutación (0,1 p.); II haga una construcción anotada del árbol semántico (utilice las reglas semánticas de verdad y falsedad y las reglas de extensión) (0,6 p.); III demuestre que es un árbol terminado (0,4 p.); IV demuestre la no validez de $\mathcal{A}$ (0,2 p.).
c. Identifique los modelos que proporcionan las ramas satisfactibles. (0,1 p.)
d. Demuestre, utilizando alguna estrategia de la lógica de juntores, que dichos modelos lo son para Γ. (0,2 p.)
e. Exprese en español las contraargumentaciones proporcionadas por tales modelos que permiten refutar $\mathcal{A}$. (0,2 p.)

2.ª cuestión (2 ptos.)

▶ No es válida una demostración ni diagramática ni gráfica.
● Siendo A y B dos conjuntos y designando por $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $=$, la unión, intersección, diferencia, e igualdad de conjuntos, respectivamente, entonces, utilizando teoría de conjuntos:
a. demuestre por doble inclusión que $A \setminus B \cup (A \cap B) \cup B \setminus A = A \cup B$; (1 p.)
b. demuestre que $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ es una partición de $A \cup B$. (1 p.)

Bloque II. Relaciones, inducción y estructuras algebraicas.

3.ª cuestión (2 ptos.)

● En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, se define la relación diádica R: $\forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.
a. Demuestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. (1 p.)
b. Utilice la definición de clase de equivalencia para encontrar todos los números enteros pertenecientes a la clase de equivalencia de $a \in \mathbb{Z}$. (1 p.)

4.ª cuestión (2 ptos.)

▶ Para responder a los apartados b), c) y d), puede usted razonar con la tabla hallada en a).
● Sean $2^{\{x,y\}}$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\{x, y\}$ y Δ la diferencia simétrica de conjuntos.
a. Halle razonadamente la tabla de Cayley de Δ en $2^{\{x,y\}}$. (0, 16 p.)
b. Demuestre que $\left(2^{\{x,y\}}; \Delta\right)$ tiene estructura de: I magma (0, 32 p.); II semigrupo (0, 32 p.); III monoide (0, 32 p.); IV grupo (0, 32 p.).
c. ¿Es $\left(2^{\{x,y\}}; \Delta\right)$ un grupo abeliano? (0, 16 p.)
d. ¿A cuál es isomorfo $\left(2^{\{x,y\}}; \Delta\right)$, al grupo cíclico C_4 o al grupo de Klein K_4? ¿Por qué? (0, 4 p.)

Bloque III. Teoría de números.

5.ª cuestión (2 ptos.)

- [•] [a] Enuncie el criterio general de divisibilidad en cualquier base; (0,2 p.)
  [b] utilícelo para hallar criterios de divisibilidad por 11 y por 101, en base diez; (0,5 p. c/u)
  [c] utilice lo anterior para, en base diez, determinar las cifras x e y para que el número $7x1y4$ sea múltiplo de 11 y de 101. (0,8 p.)

6.ª cuestión (2 ptos.)

► Para resolver esta cuestión, se exige que usted [I] proponga, razonando su porqué, una ecuación diofántica que modelice la situación expuesta (0,4 p.) y [II] demuestre que tiene al menos una solución; (0,2 p.) después, se exige que usted utilice la teoría de las ecuaciones diofánticas para: [III] calcular una solución particular de la ecuación propuesta en I); (0,4 p.) [IV] calcular su solución general a partir de la solución particular anterior; (0,4 p.) [V] calcular la solución de la cuestión en estudio. (0,6 p.)

- [•] Supongamos que el día D se ejecutaron once procesos en el computador C, que el tiempo total de la ejecución fue de 91 segundos y que los procesos fueron de dos tipos, A y B, que son tales que un proceso de tipo A tarda en ejecutarse siete segundos menos que uno de tipo B. En estas condiciones, ¿cuánto dura la ejecución de un proceso de tipo A y de uno de tipo B? y ¿cuántos procesos de cada tipo se ejecutaron el día D en el computador C?

Bloque IV. Razonamiento combinatorio.

7.ª cuestión (2 ptos.)

- [•] Demuestre combinatoriamente (sin usar los conceptos, ni de número factorial ni de número factorial descendente ni de número factorial ascendente):
  [a] $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$; (1 p.)
  [b] $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k} + 2 \cdot \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$. (1 p.)

8.ª cuestión (2 ptos.)

► Para resolver esta cuestión se exige que usted: [I] incluya en su razonamiento alguna —a su elección— de las cuatro modelizaciones combinatorias —selección, distribución, partición, descomposición aditiva—; (1 p.) [II] interprete el resultado de acuerdo con cada una de las demás modelizaciones que usted considere compatibles con la situación expuesta en la cuestión en estudio. (1 p.)
► En cada una de las modelizaciones debe identificar claramente cómo está representado cada número.

- [•] En el primer millar de números enteros no negativos, esto es, desde 0 hasta 999, ambos incluidos, ¿qué hay más, números que tienen alguna cifra 1 o números que no la tienen?

Bloque V. Ecuaciones en diferencias.

► Para las dos cuestiones siguientes se exige que usted utilice la teoría de ecuaciones en diferencias (aplique los teoremas CERO a SEIS cuando corresponda) para, en todos los casos razonando su porqué, modelizar y resolver la situación expuesta en la cuestión en estudio: [I] proponga una ecuación en diferencias (ED) con coeficientes constantes (0,4 p.); [II] proponga un problema de valores iniciales (PVI) (0,12 p.); [III] demuestre que dicho PVI tiene solución única (0,08 p.); [IV] calcule las raíces características pertinentes (0,4 p.); [V] obtenga las soluciones de las ED concernientes (0,4 p.), y [VI] resuelva el mencionado PVI y, por tanto, obtenga la solución explícita de la cuestión (0,6 p.).

9.ª cuestión (2 ptos.)

- [•] Calcule el número de saludos que suceden entre n personas si todas se saludan entre sí una, y sólo una, vez (y ninguna persona se saluda a sí misma).

10.ª cuestión (2 ptos.)

- [•] Considere una partícula que se desplaza horizontalmente con un movimiento acelerado. Suponga que la distancia que recorre en cada segundo es el doble de la distancia que recorrió en el segundo previo. Si la partícula está inicialmente a una distancia de 2 unidades de un punto fijo O y a una distancia de 5 unidades de O después de dos segundos, ¿cuál es la posición de la partícula respecto de O transcurridos n segundos?

Quizás quiera volver sobre sus respuestas para asegurarse de que no omitió nada que hubiese querido escribir y que lo escrito tiene sentido. Recuerde que debe entregar esta hoja cumplimentada y marcar si entrega hojas de respuestas (y, por tanto, marcar las cuestiones elegidas) o marcar que no las entrega («No presentado»). Muchas gracias por su tiempo, consideración y flexibilidad.